Projeto e Análise de Algoritmos

A. G. Silva

Baseado nos materiais de
Souza, Silva, Lee, Rezende, Miyazawa – Unicamp

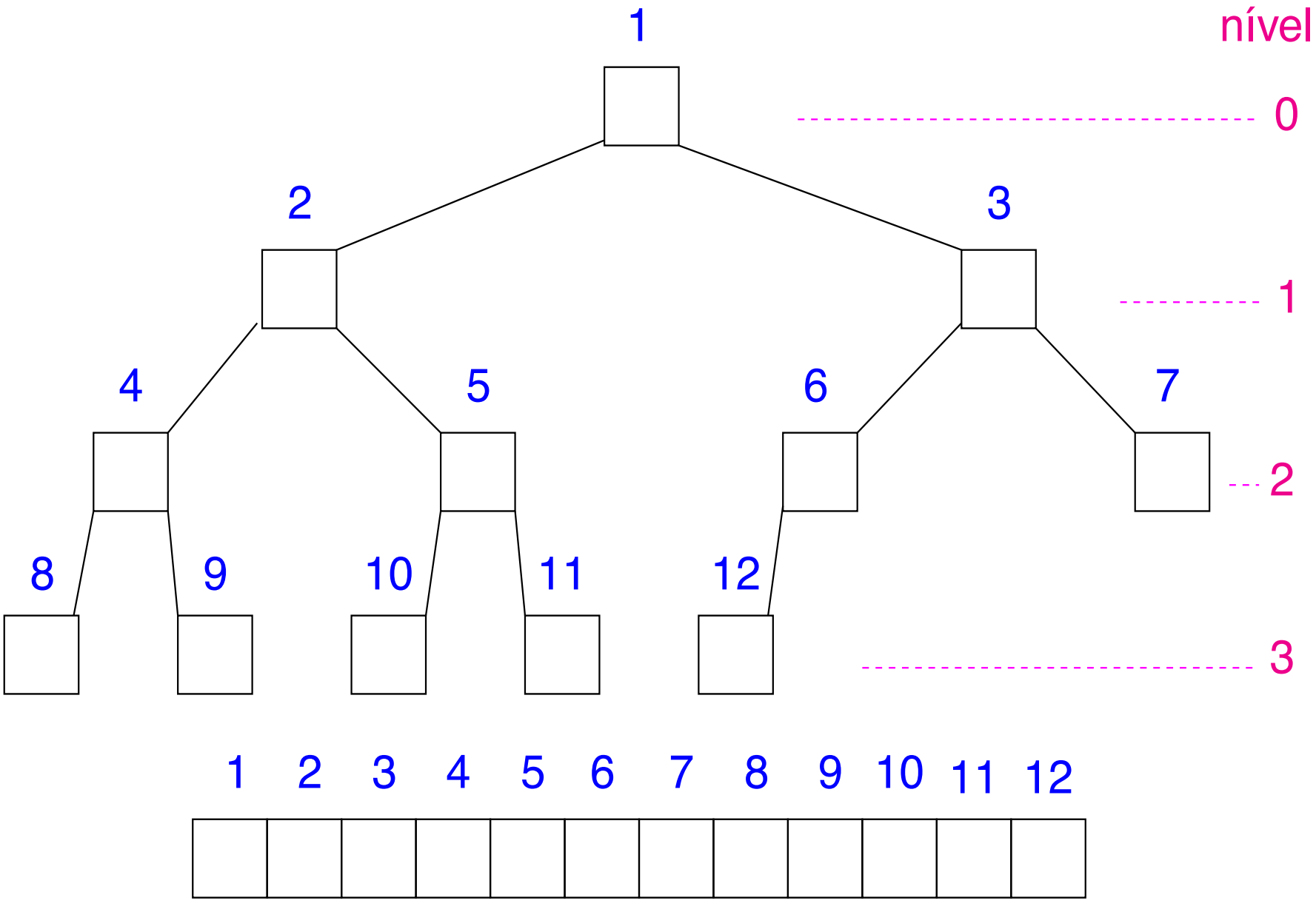
26 de junho de 2018

Ordenação – Heapsort

Heapsort

- O *Heapsort* é um algoritmo de ordenação que usa uma estrutura de dados sofisticada chamada *heap*.
- A complexidade de pior caso é $\Theta(n \lg n)$.
- *Heaps* podem ser utilizados para implementar filas de prioridade que são extremamente úteis em outros algoritmos.
- Um *heap* é um vetor A que simula uma árvore binária completa, com exceção possivelmente do último nível.

Heaps



Heaps

Considere um vetor $A[1 \ldots n]$ representando um heap.

- Cada posição do vetor corresponde a um nó do heap.
- O pai de um nó i é $\lfloor i/2 \rfloor$.
- O nó 1 não tem pai.

Heaps

- Um nó i tem
  $2i$ como filho esquerdo e
  $2i + 1$ como filho direito.
- Naturalmente, o nó i
  tem filho esquerdo apenas se $2i \leq n$ e
  tem filho direito apenas se $2i + 1 \leq n$.
- Um nó i é uma folha se não tem filhos, ou seja, se $2i > n$.
- As folhas são $\lfloor n/2 \rfloor + 1, \ldots, n - 1, n$.

Níveis

Cada nível p, exceto talvez o último, tem exatamente 2^p nós e esses são

$$2^p, 2^p + 1, 2^p + 2, \ldots, 2^{p+1} - 1.$$

O nó i pertence ao nível ???.
O nó i pertence ao nível $\lfloor \lg i \rfloor$.

Prova: Se p é o nível do nó i, então

$$\begin{array}{rcccl} 2^p & \leq & i & < & 2^{p+1} \quad \Rightarrow \\ \lg 2^p & \leq & \lg i & < & \lg 2^{p+1} \quad \Rightarrow \\ p & \leq & \lg i & < & p+1 \end{array}$$

Logo, $p = \lfloor \lg i \rfloor$.

Portanto o número total de níveis é ???.
Portanto, o número total de níveis é $1 + \lfloor \lg n \rfloor$.

Altura

A altura de um nó *i* é o maior comprimento de um caminho de *i* a uma folha.

Os nós que têm altura zero são as folhas.

Qual é a altura de um nó *i*?

Altura

A altura de um nó i é o comprimento da seqüência

$$2\,i, 2^2\,i, 2^3\,i, \ldots, 2^h\,i$$

onde $2^h\,i \leq n < 2^{(h+1)}\,i$.

Assim,

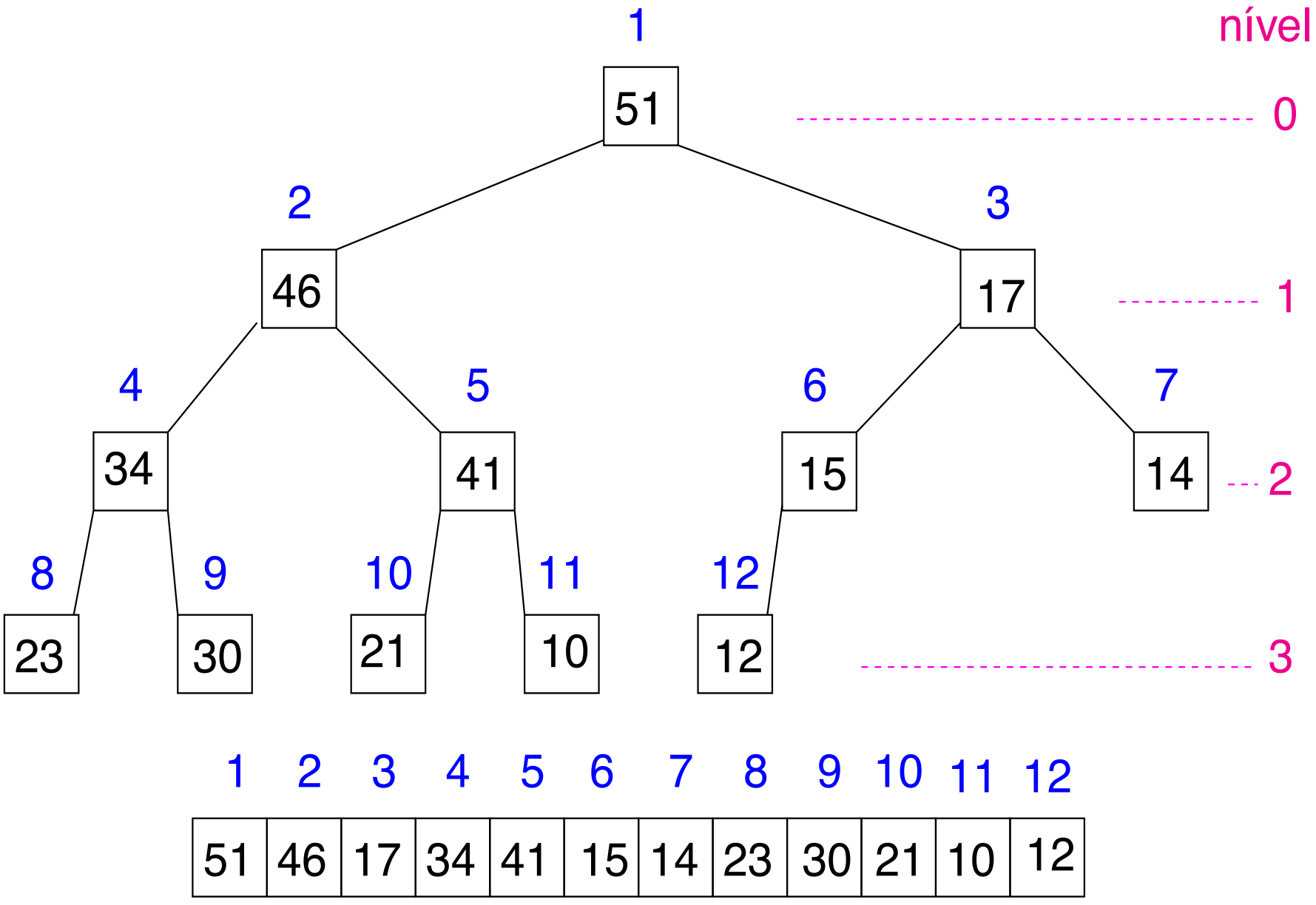
$$\begin{array}{rcccl} 2^h\,i & \leq & n & < & 2^{h+1}\,i \quad \Rightarrow \\ 2^h & \leq & n/i & < & 2^{h+1} \quad \Rightarrow \\ h & \leq & \lg(n/i) & < & h+1 \end{array}$$

Portanto, a altura de i é $\lfloor \lg(n/i) \rfloor$.

Max-heaps

- Um nó i satisfaz a propriedade de (max-)heap se $A[\lfloor i/2 \rfloor] \geq A[i]$ (ou seja, pai $\geq$ filho).
- Uma árvore binária completa é um *max-heap* se todo nó distinto da raiz satisfaz a propriedade de heap.
- O máximo ou maior elemento de um max-heap está na raiz.

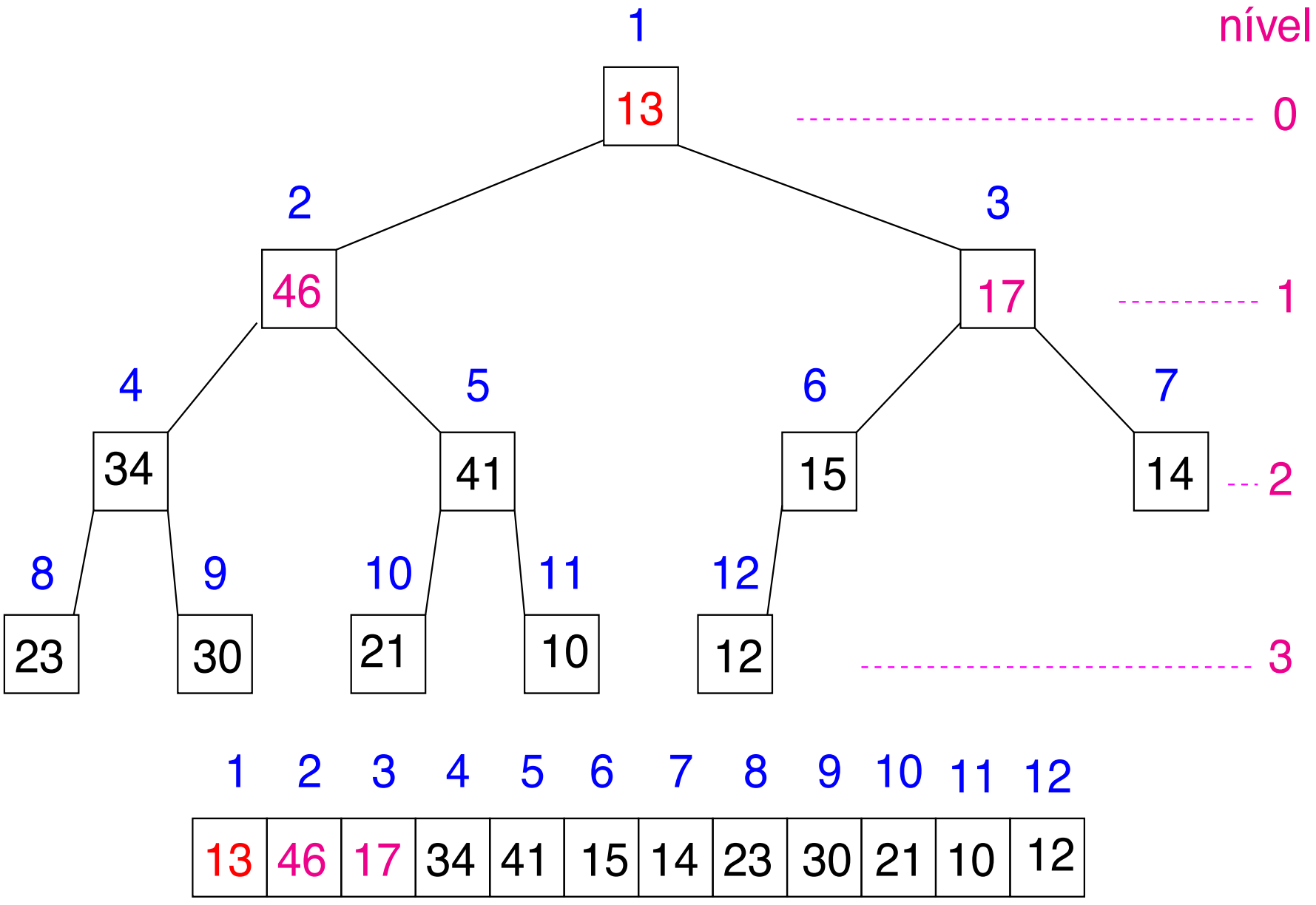
Max-heap


1
nível
51
0
2
3
46
17
1
4
5
6
7
34
41
15
14
2
8
9
10
11
12
23
30
21
10
12
3
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
51 46 17 34 41 15 14 23 30 21 10 12

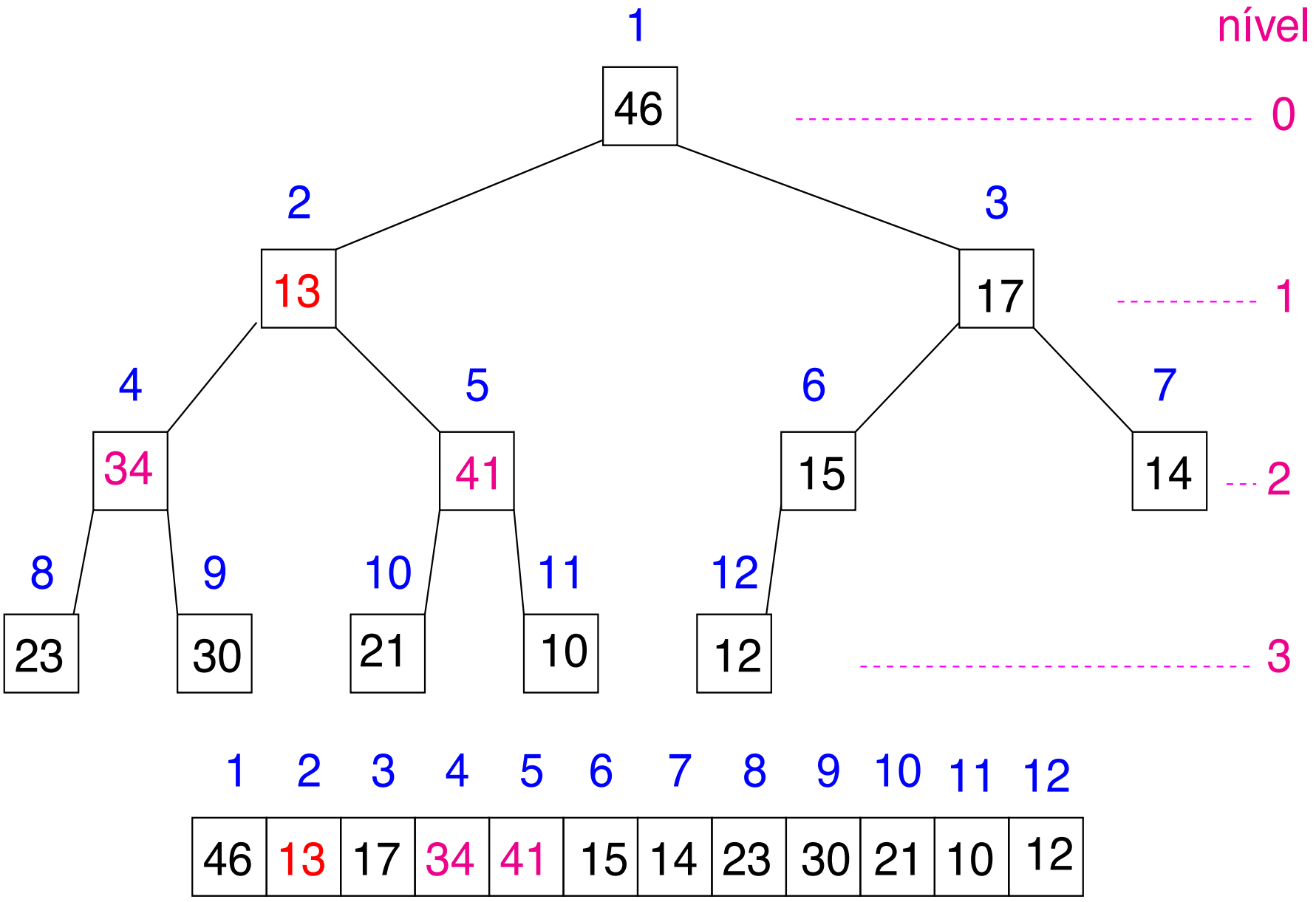
Min-heaps

- Um nó i satisfaz a propriedade de (min-)heap se $A[\lfloor i/2 \rfloor] \leq A[i]$ (ou seja, pai $\leq$ filho).
- Uma árvore binária completa é um *min-heap* se todo nó distinto da raiz satisfaz a propriedade de min-heap.
- Vamos nos concentrar apenas em max-heaps.
- Os algoritmos que veremos podem ser facilmente modificados para trabalhar com min-heaps.

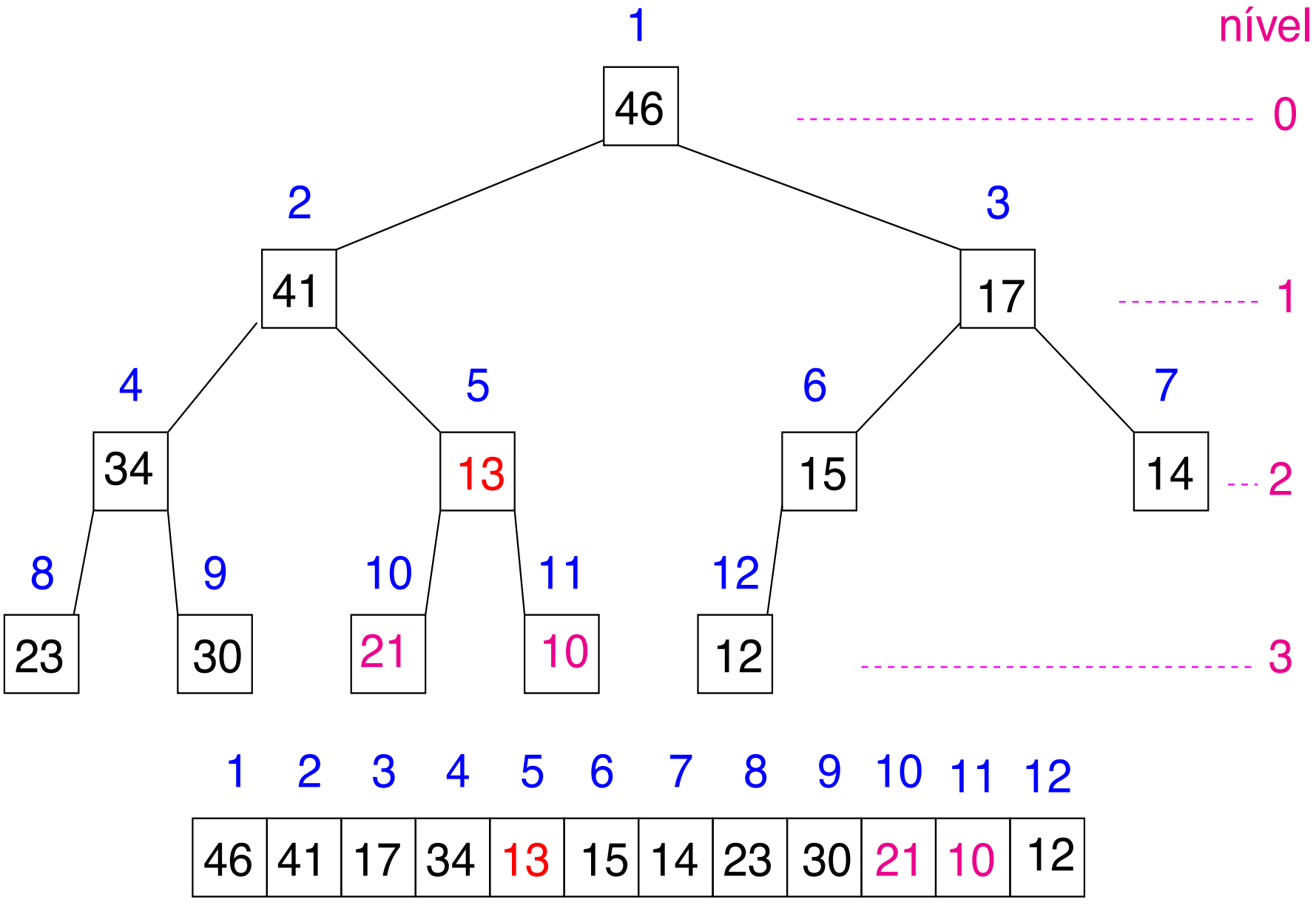
Manipulação de max-heap



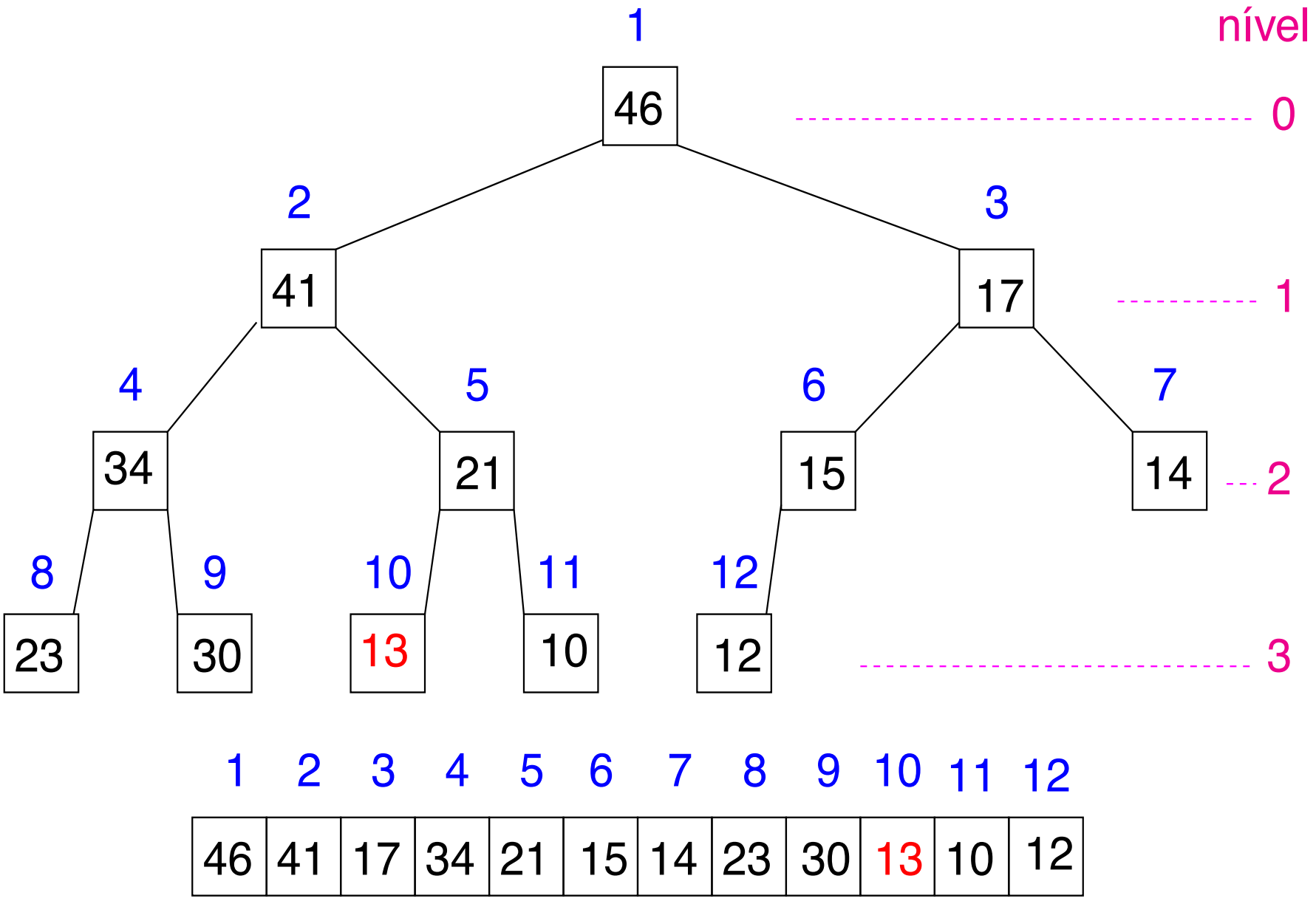
Manipulação de max-heap



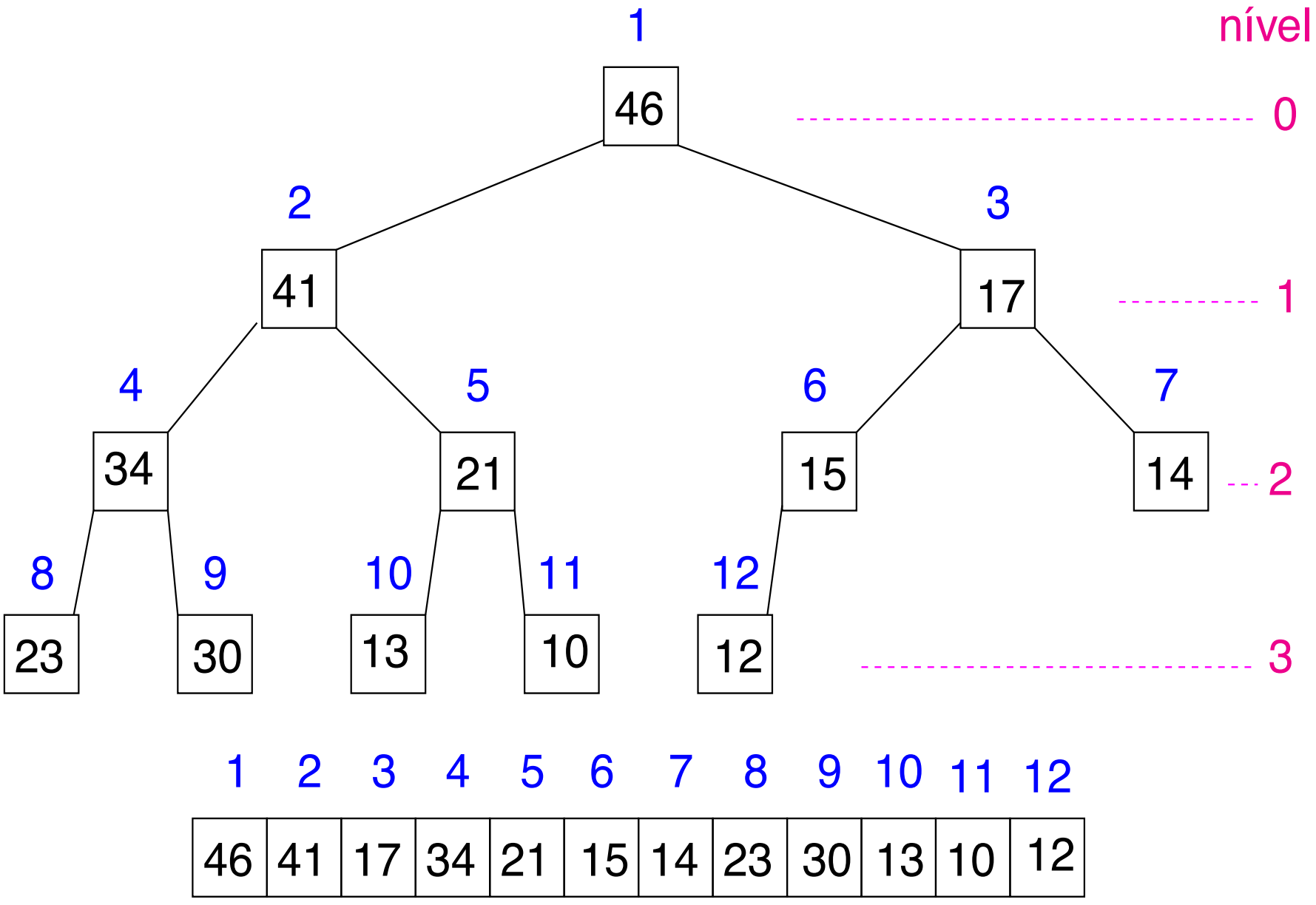
Manipulação de max-heap



Manipulação de max-heap



Manipulação de max-heap



Manipulação de max-heap

Recebe $A[1 \ldots n]$ e $i \geq 1$ tais que subárvores com raízes $2i$ e $2i+1$ são max-heaps e rearranja A de modo que subárvore com raiz i seja um max-heap.

MAX-HEAPIFY(A, n, i)

```
 1  e ← 2i
 2  d ← 2i + 1
 3  se e ≤ n  e A[e] > A[i]
 4        então maior ← e
 5        senão maior ← i
 6  se d ≤ n e A[d] > A[maior]
 7        então maior ← d
 8  se maior ≠ i
 9        então A[i] ↔ A[maior]
10              MAX-HEAPIFY(A, n, maior)
```

Complexidade de MaxHeapify

MAX-HEAPIFY(A, n, i)		Tempo
1	$e \leftarrow 2i$	?
2	$d \leftarrow 2i + 1$	?
3	**se** $e \leq n$ **e** $A[e] > A[i]$	?
4	**então** maior $\leftarrow e$	?
5	**senão** maior $\leftarrow i$	?
6	**se** $d \leq n$ e $A[d] > A[\text{maior}]$	?
7	**então** maior $\leftarrow d$	?
8	**se** maior $\neq i$	?
9	**então** $A[i] \leftrightarrow A[\text{maior}]$	?
10	MAX-HEAPIFY(A, n, maior)	?

h := altura de i = $\lfloor \lg \frac{n}{i} \rfloor$

$T(h)$:= complexidade de tempo no pior caso

Complexidade de MaxHeapify

MAX-HEAPIFY(A, n, i)		Tempo
1	$e \leftarrow 2i$	$\Theta(1)$
2	$d \leftarrow 2i + 1$	$\Theta(1)$
3	**se** $e \leq n$ **e** $A[e] > A[i]$	$\Theta(1)$
4	**então** maior $\leftarrow e$	$O(1)$
5	**senão** maior $\leftarrow i$	$O(1)$
6	**se** $d \leq n$ e $A[d] > A[\text{maior}]$	$\Theta(1)$
7	**então** maior $\leftarrow d$	$O(1)$
8	**se** maior $\neq i$	$\Theta(1)$
9	**então** $A[i] \leftrightarrow A[\text{maior}]$	$O(1)$
10	MAX-HEAPIFY(A, n, maior)	$T(h-1)$

h := altura de $i = \lfloor \lg \frac{n}{i} \rfloor$

$T(h) \leq T(h-1) + \Theta(5) + O(2)$.

Complexidade de MaxHeapify

h := altura de $i = \lfloor \lg \frac{n}{i} \rfloor$

$T(h)$:= complexidade de tempo no pior caso

$T(h) \leq T(h-1) + \Theta(1)$

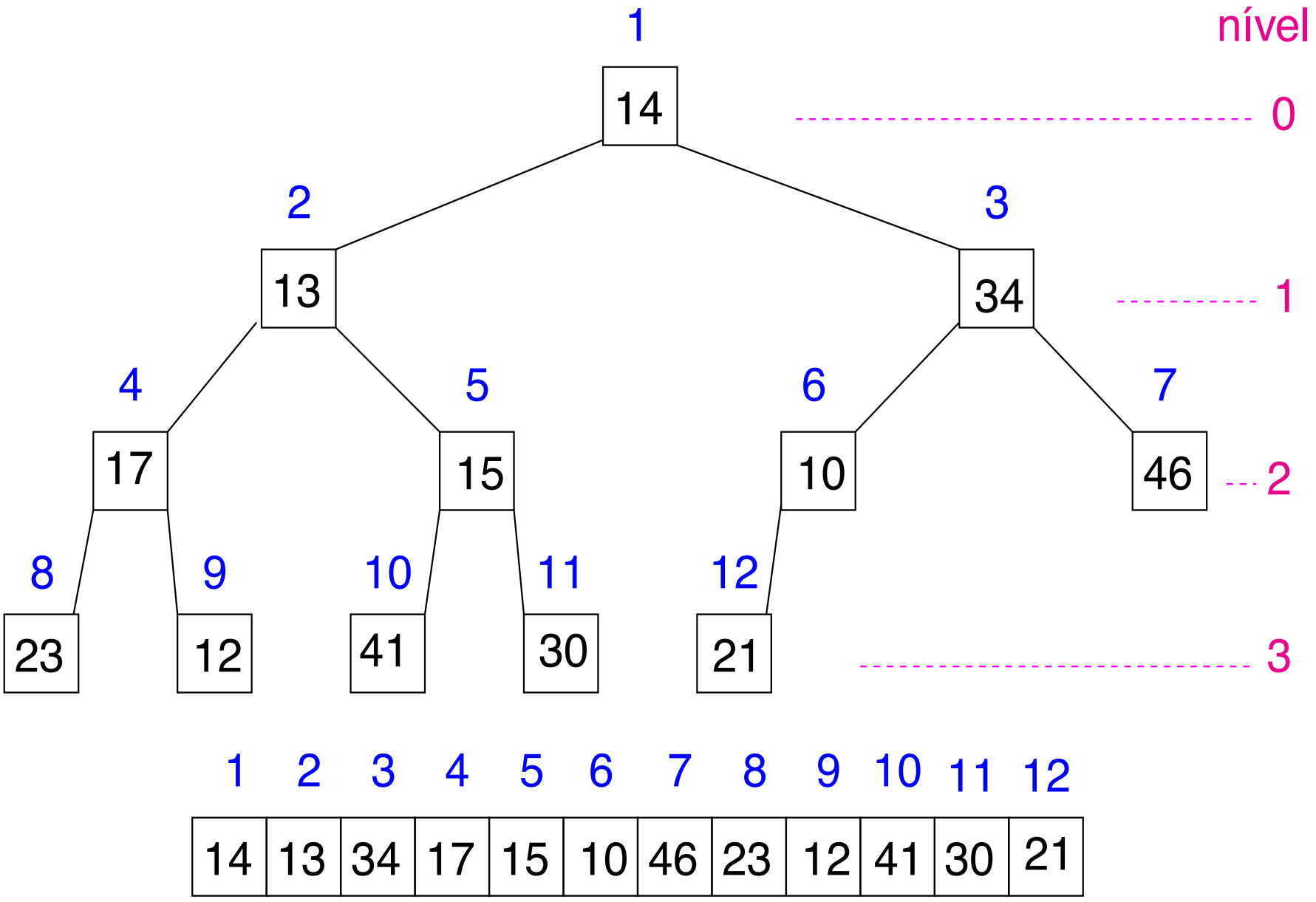
Solução assintótica: $T(n)$ é ???.

Solução assintótica: $T(n)$ é $O(h)$.

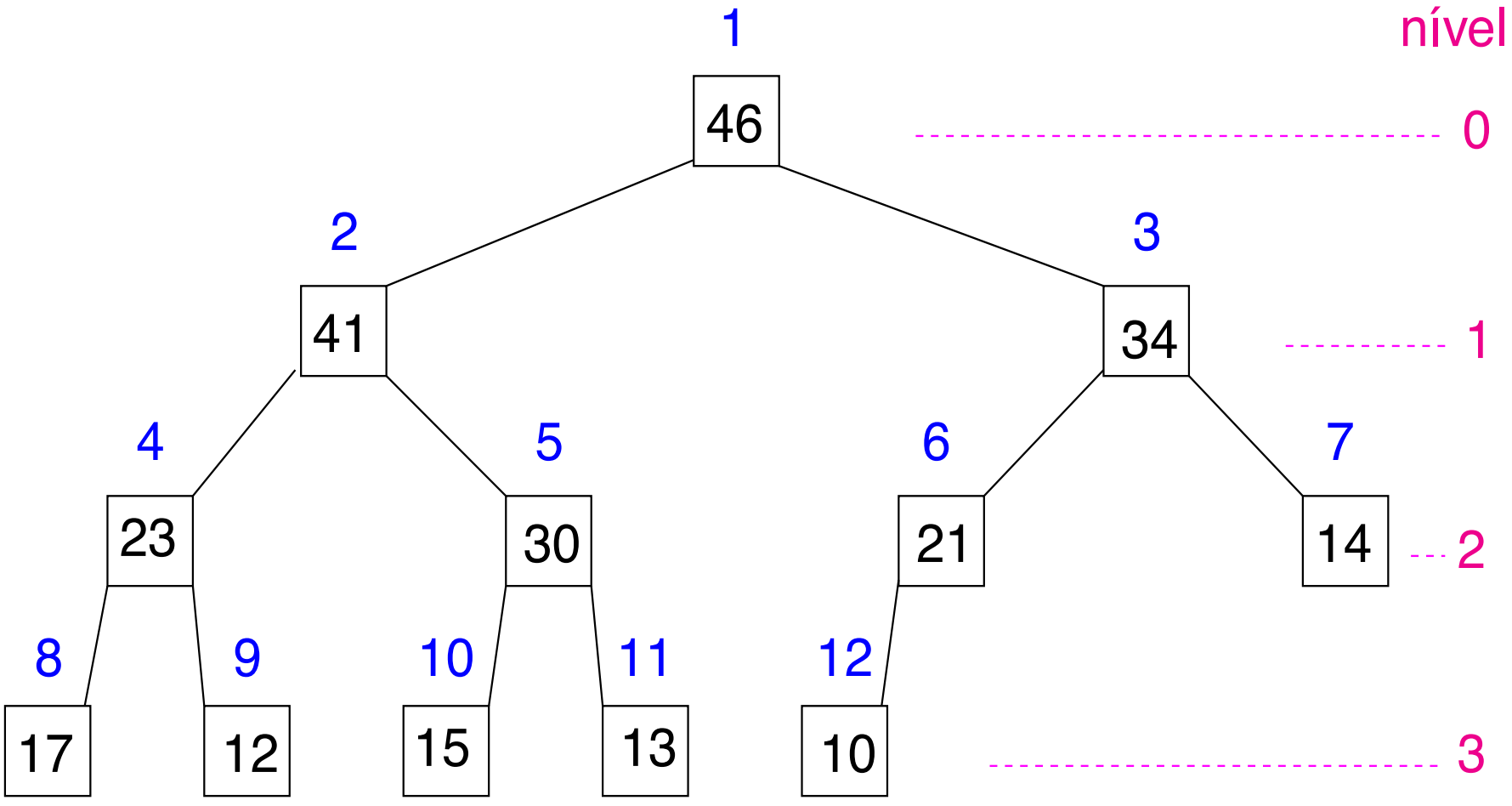
Como $h \leq \lg n$, podemos dizer que:

O consumo de tempo do algoritmo Max-Heapify é $O(\lg n)$ (ou melhor ainda, $O(\lg \frac{n}{i})$).

Construção de um max-heap



Construção de um max-heap



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
46	41	34	23	30	21	14	17	12	15	13	10

Construção de um max-heap

Recebe um vetor $A[1 \ldots n]$ e rearranja A para que seja max-heap.

BUILDMAXHEAP(A, n)
1 **para** $i \leftarrow \lfloor n/2 \rfloor$ **decrescendo até** 1 **faça**
2 MAX-HEAPIFY(A, n, i)

Invariante:

No início de cada iteração, $i + 1, \ldots, n$ são raízes de max-heaps.

$T(n) =$ complexidade de tempo no pior caso

Análise grosseira: $T(n)$ é $\frac{n}{2}\, O(\lg n) = O(n \lg n)$.

Construção de um max-heap

Análise mais cuidadosa: $T(n)$ é $O(n)$.

- Na iteração i são feitas $O(h_i)$ comparações e trocas no pior caso, onde h_i é a altura da subárvore de raiz i.
- Seja $S(h)$ a soma das alturas de todos os nós de uma árvore binária completa de altura h.
- A altura de um heap é $\lfloor \lg n \rfloor + 1$.

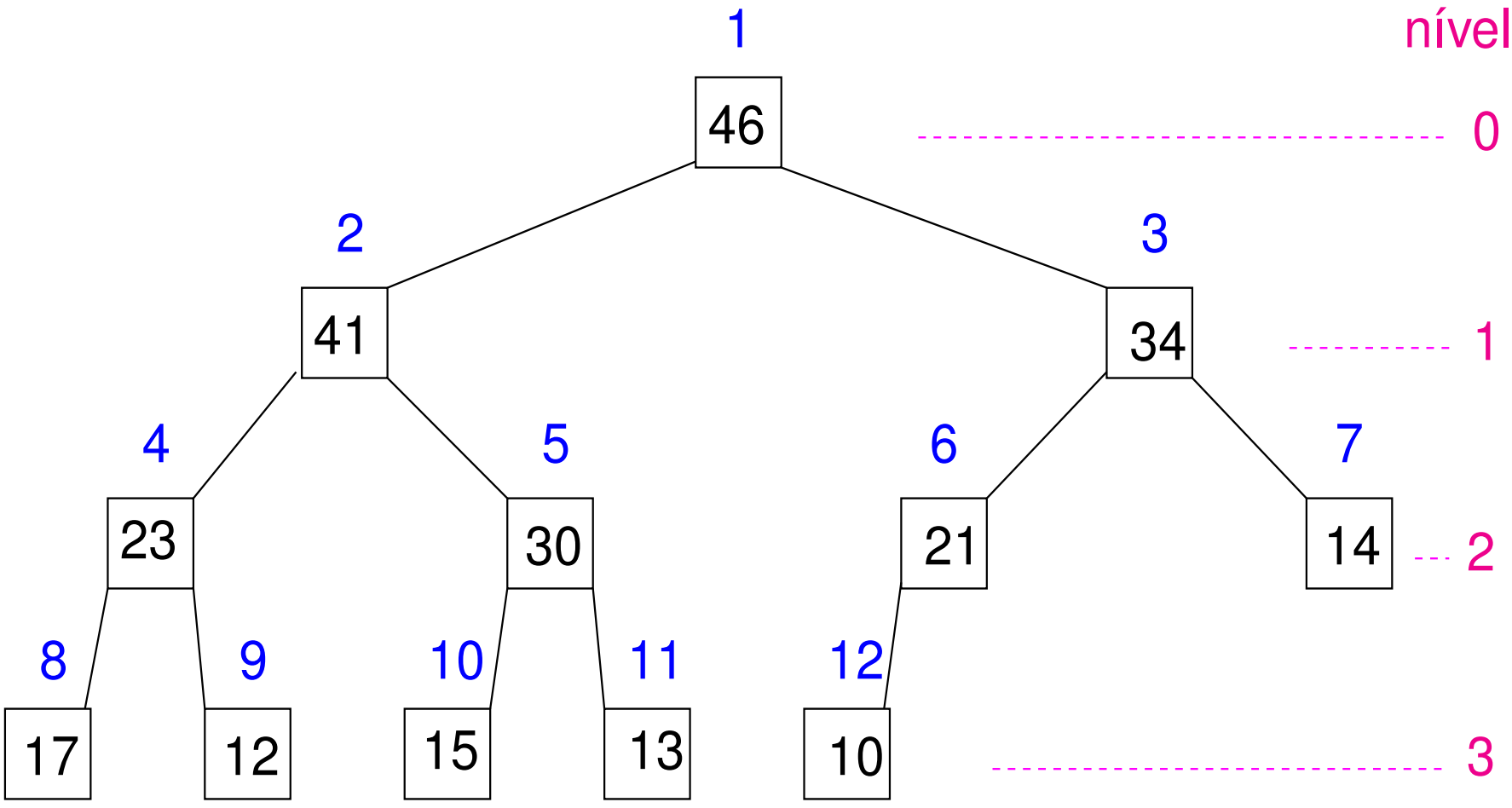
  A complexidade de BUILDMAXHEAP é $T(n) = O(S(\lg n))$.

Construção de um max-heap

- Pode-se provar por indução que $S(h) = 2^{h+1} - h - 2$.
- Logo, a complexidade de BUILDMAXHEAP é $T(n) = O(S(\lg n)) = O(n)$.

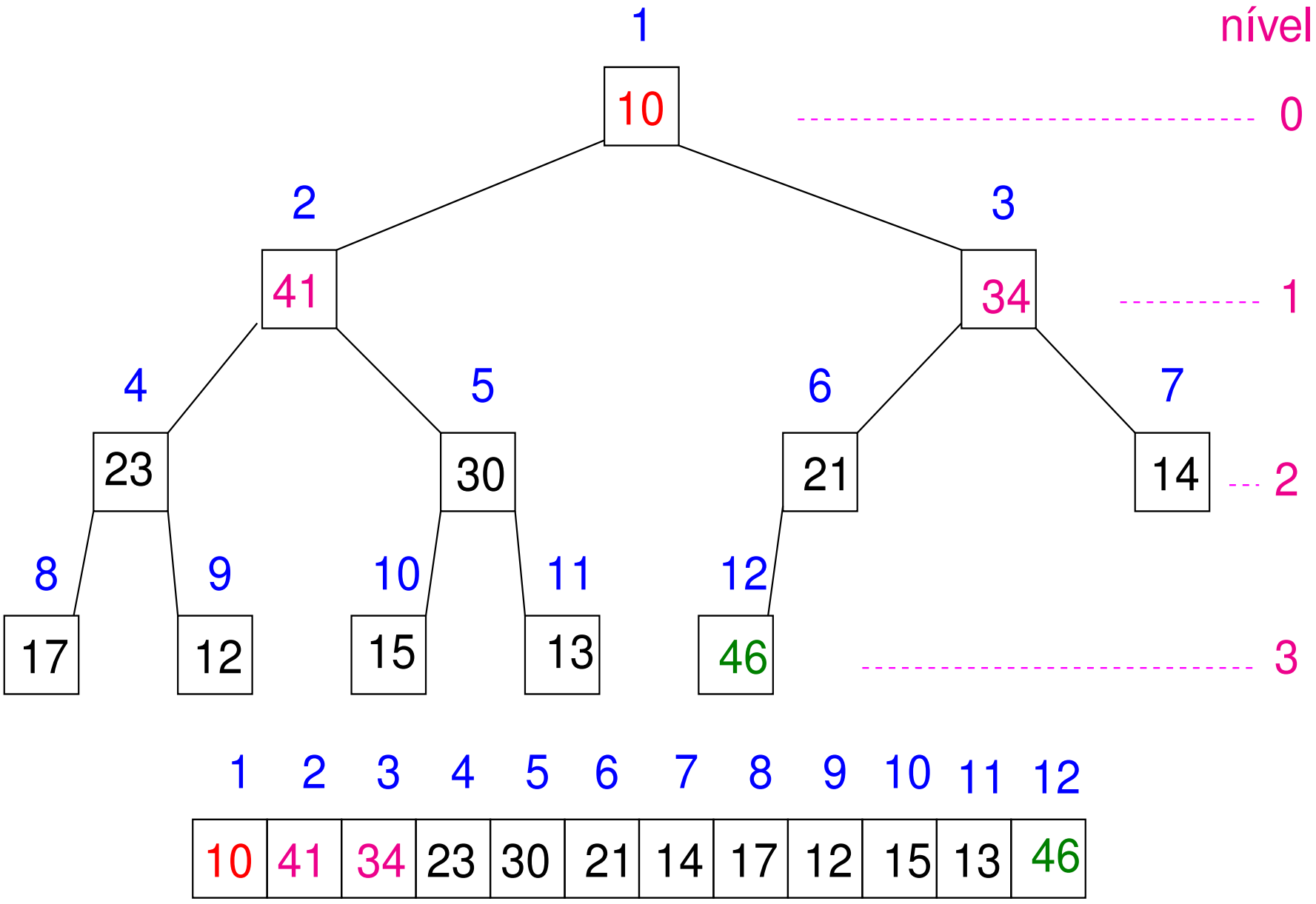
  Mais precisamente, $T(n) = \Theta(n)$. (Por quê?)
- Veja no CLRS uma prova diferente deste fato.

HeapSort

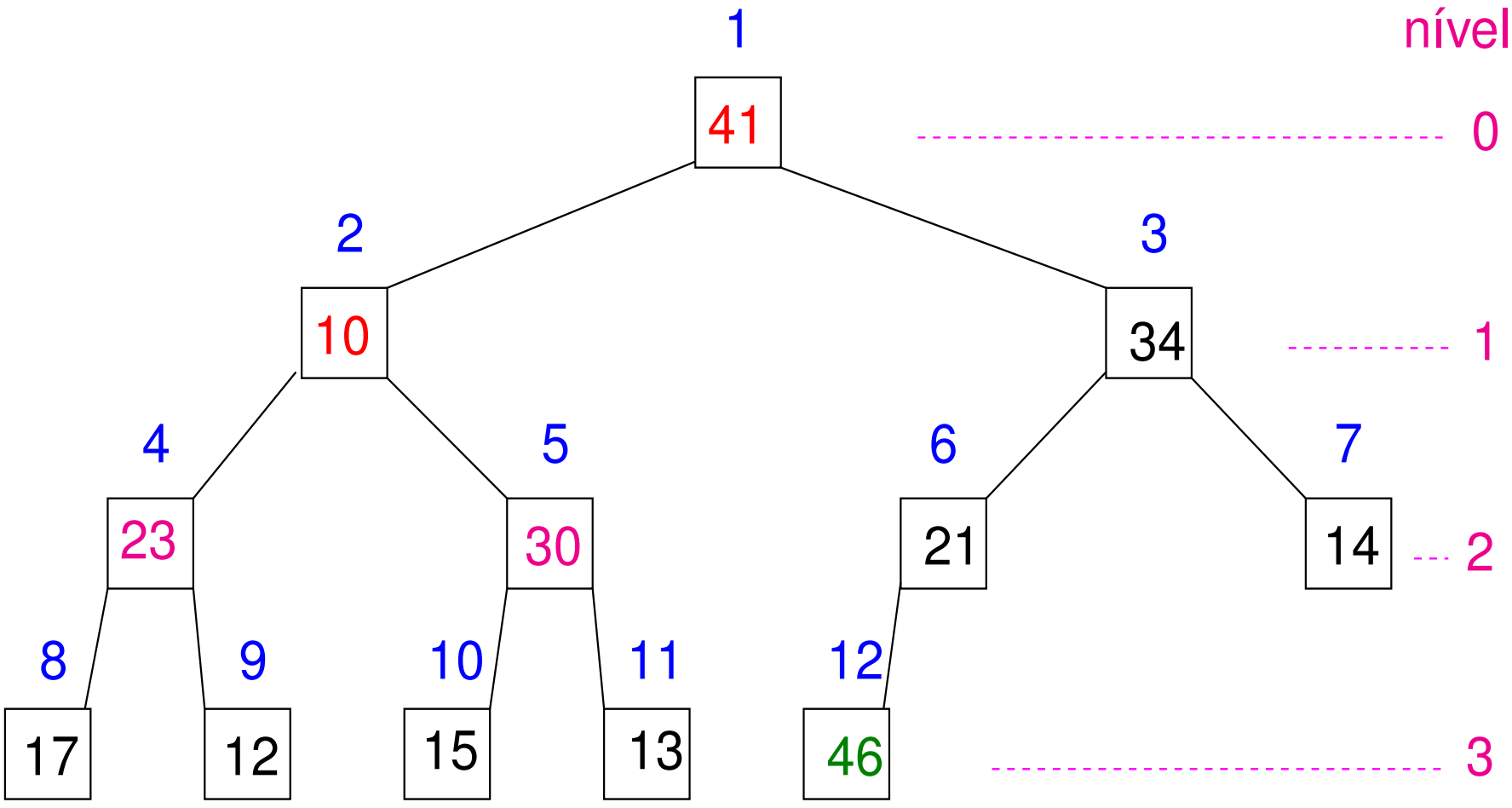


1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
46	41	34	23	30	21	14	17	12	15	13	10

HeapSort

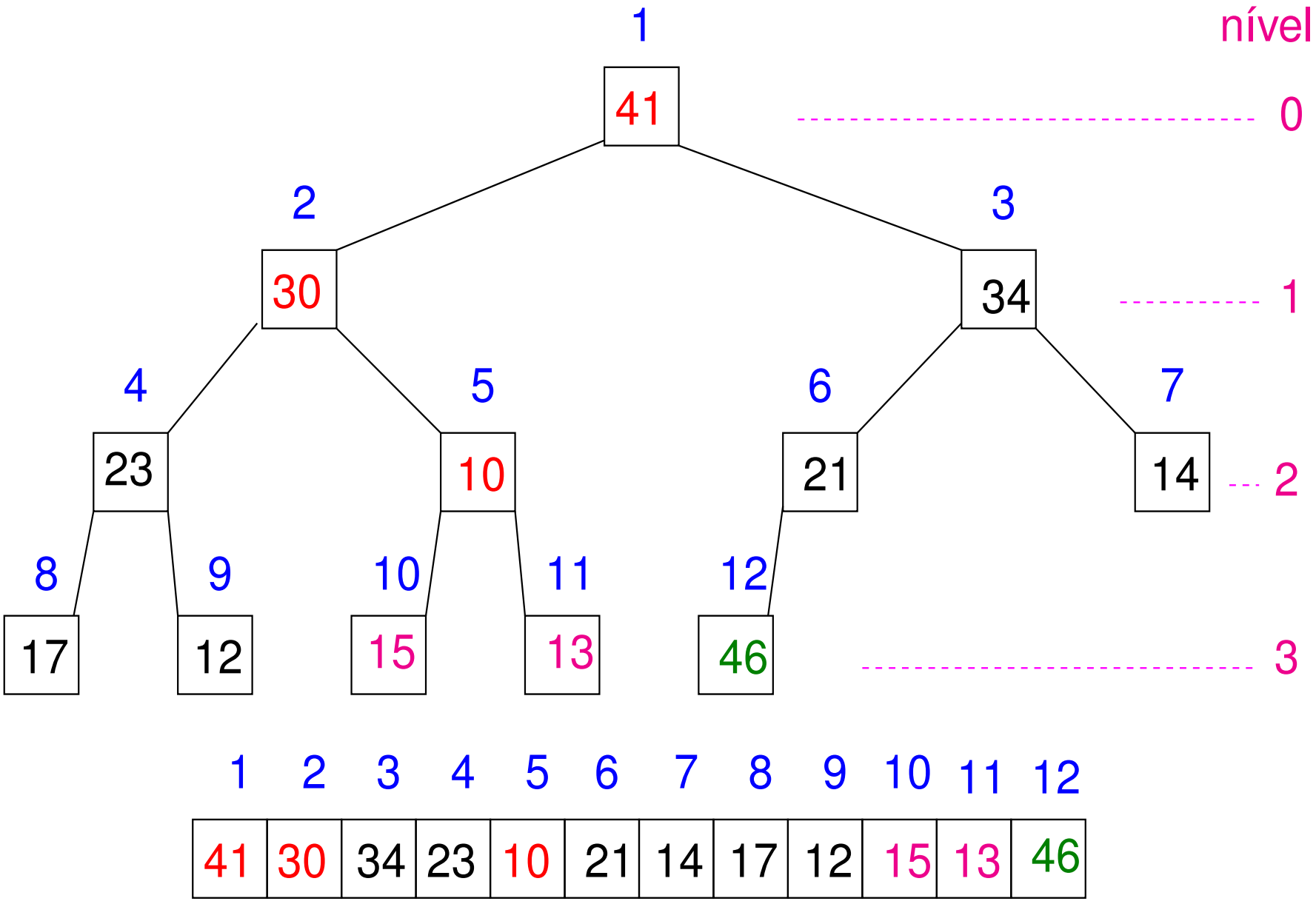

1
nível
10
0
2
3
41
34
1
4
5
6
7
23
30
21
14
2
8
9
10
11
12
17
12
15
13
46
3
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
10 41 34 23 30 21 14 17 12 15 13 46

HeapSort

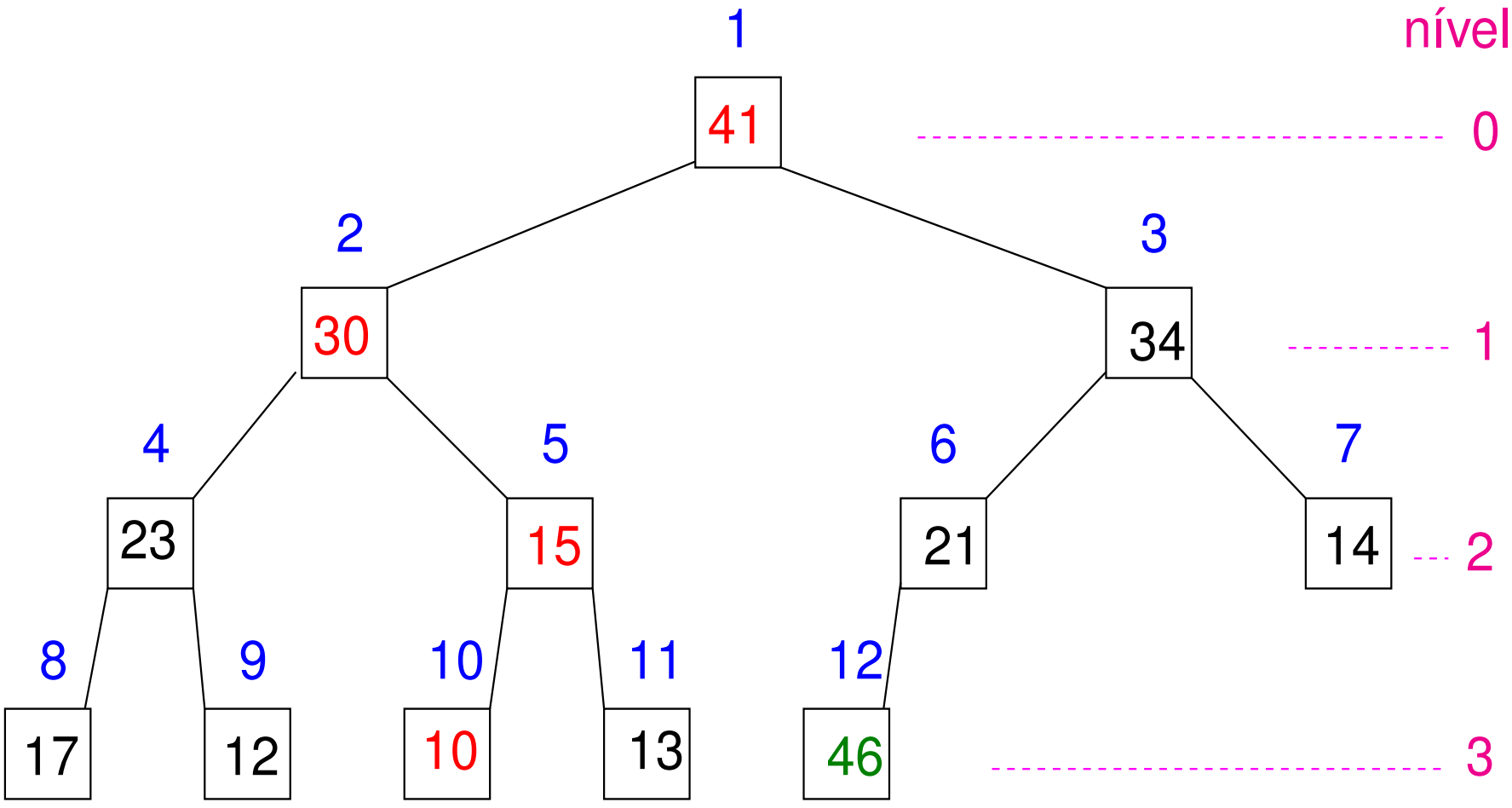


1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
41	10	34	23	30	21	14	17	12	15	13	46

HeapSort

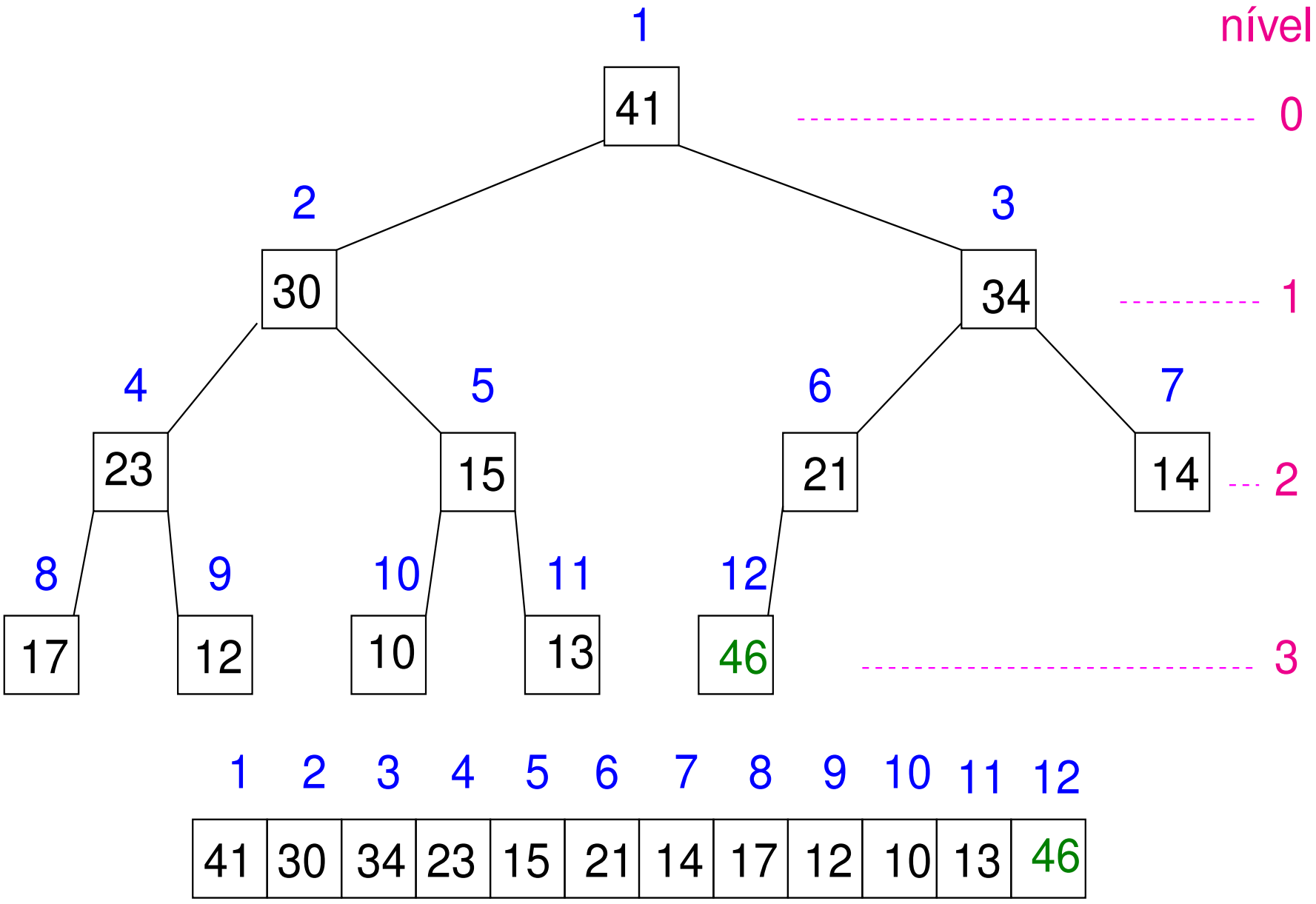

1
nível
41
0
2
3
30
34
1
4
5
6
7
23
10
21
14
2
8
9
10
11
12
17
12
15
13
46
3
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
41 30 34 23 10 21 14 17 12 15 13 46

HeapSort

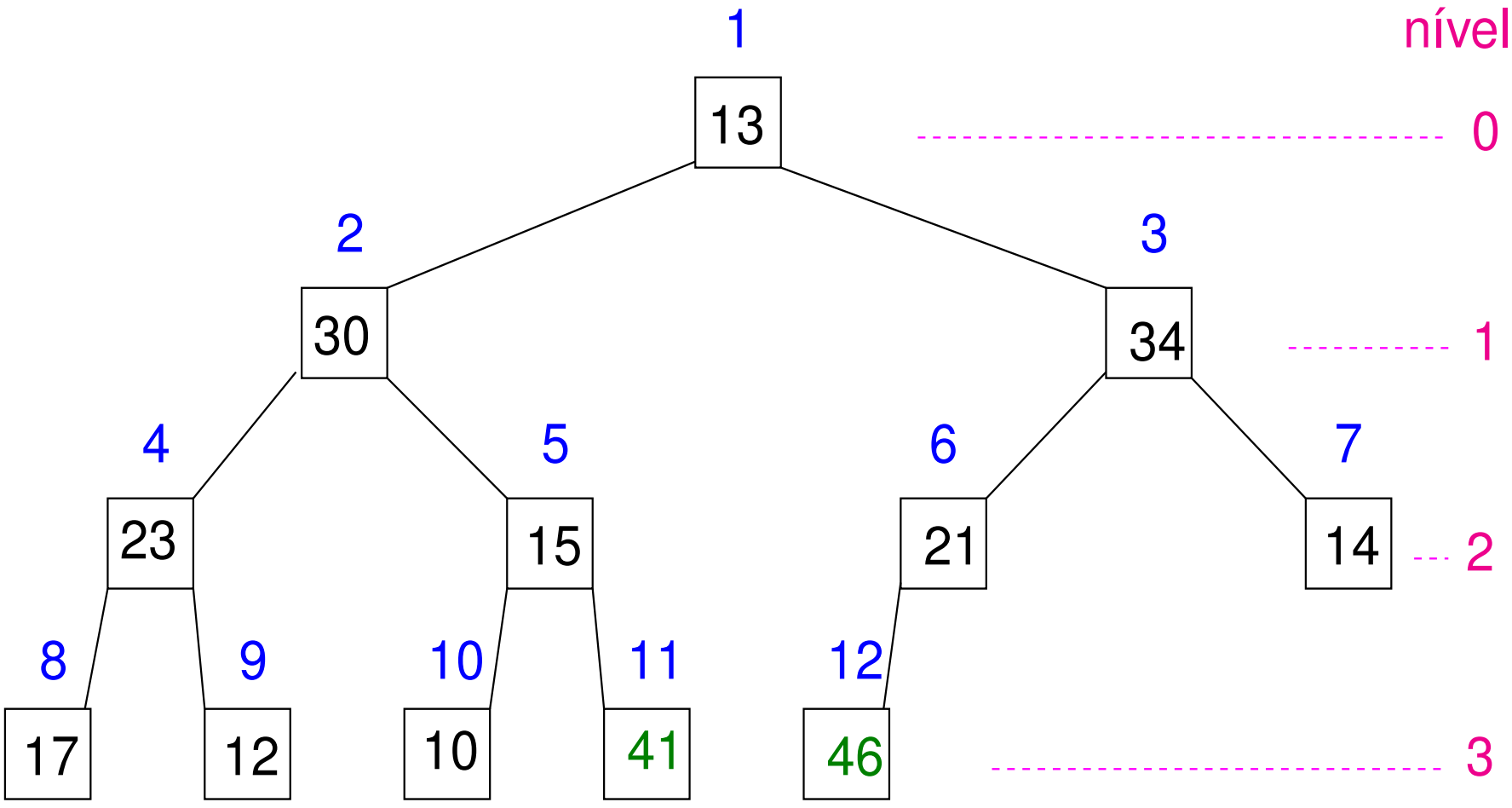


1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
41	30	34	23	15	21	14	17	12	10	13	46

HeapSort

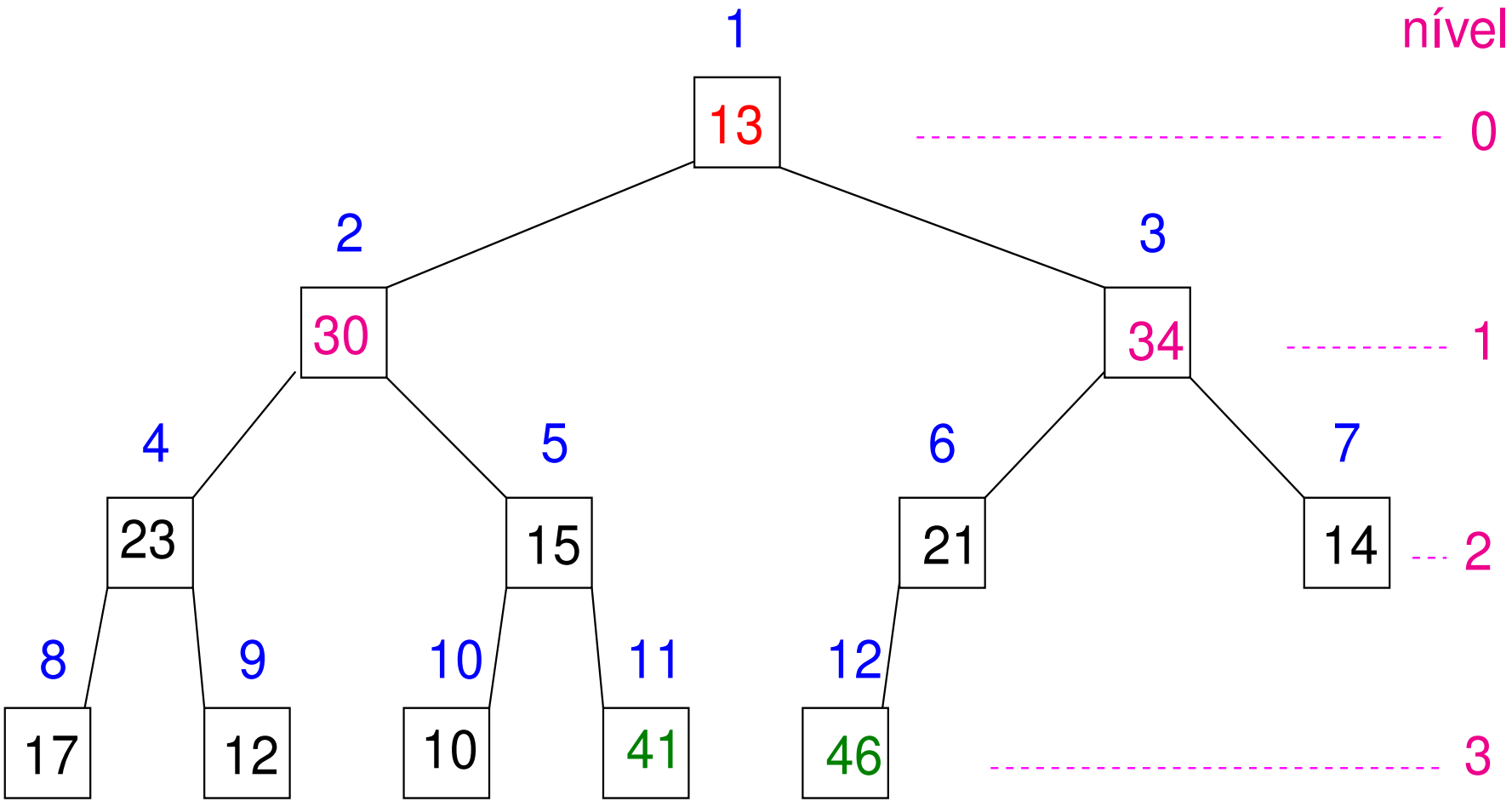

1
nível
41
0
2
3
30
34
1
4
5
6
7
23
15
21
14
2
8
9
10
11
12
17
12
10
13
46
3
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
41 30 34 23 15 21 14 17 12 10 13 46

HeapSort



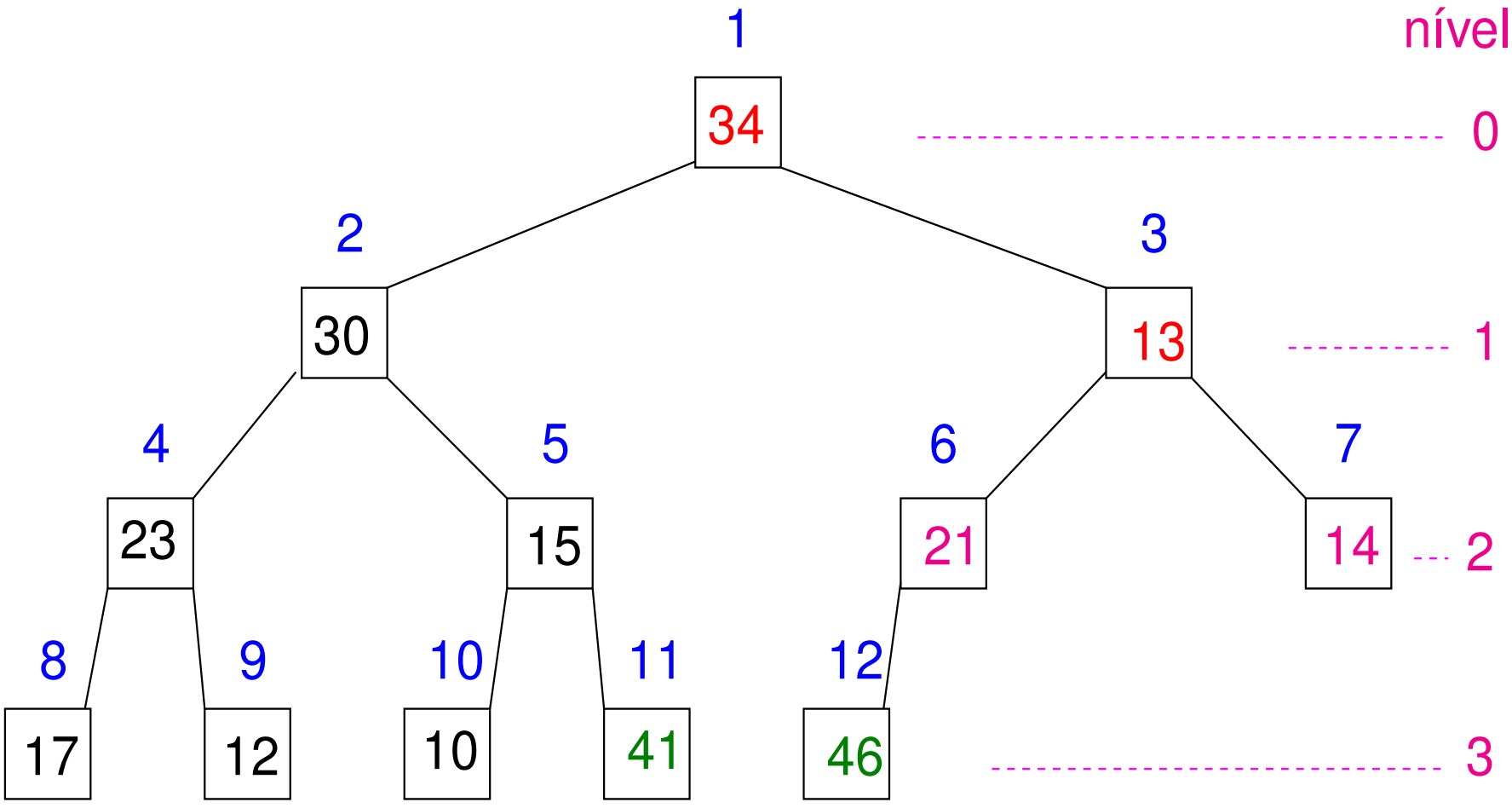
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	30	34	23	15	21	14	17	12	10	41	46

HeapSort



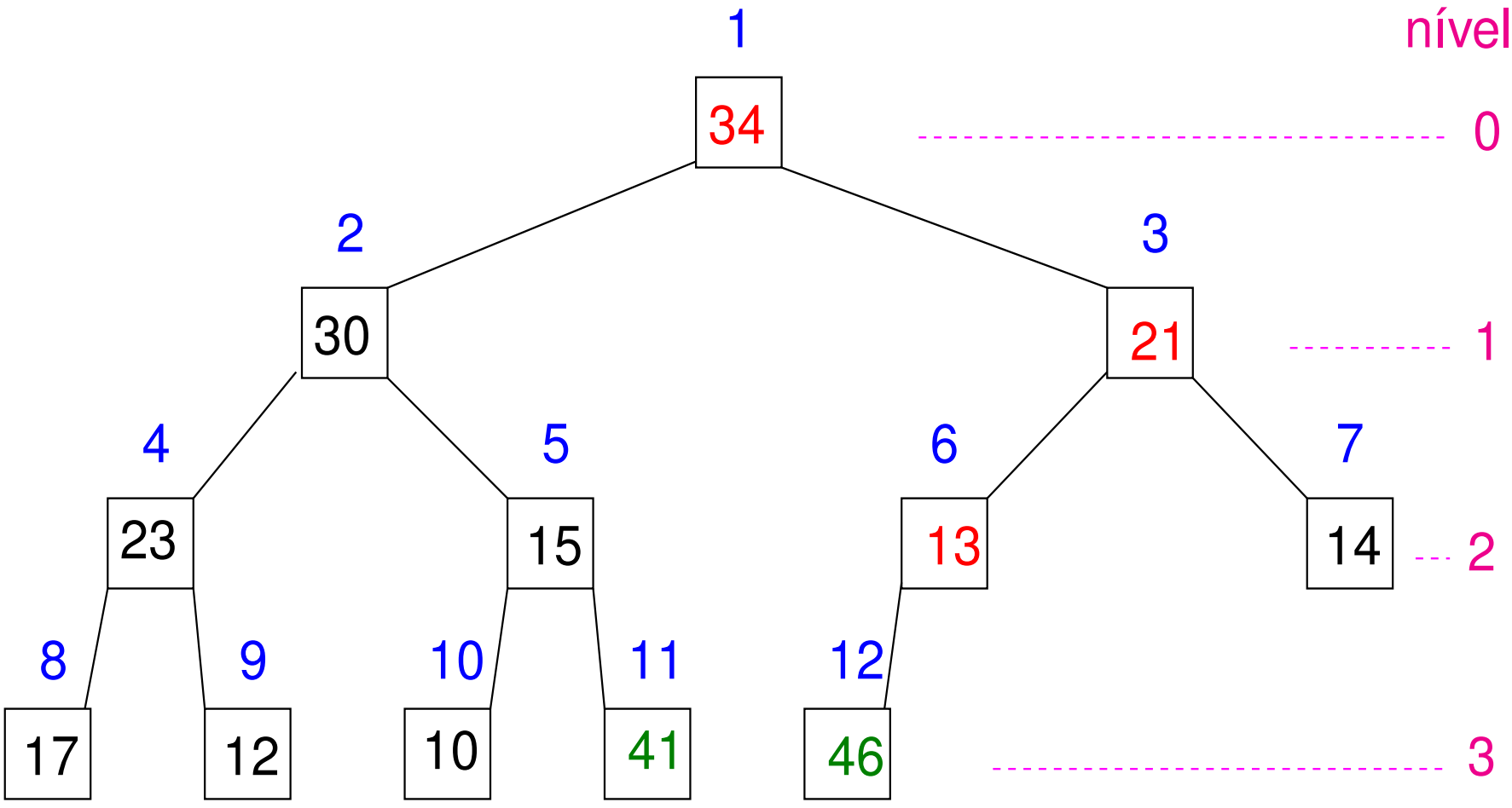
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	30	34	23	15	21	14	17	12	10	41	46

HeapSort



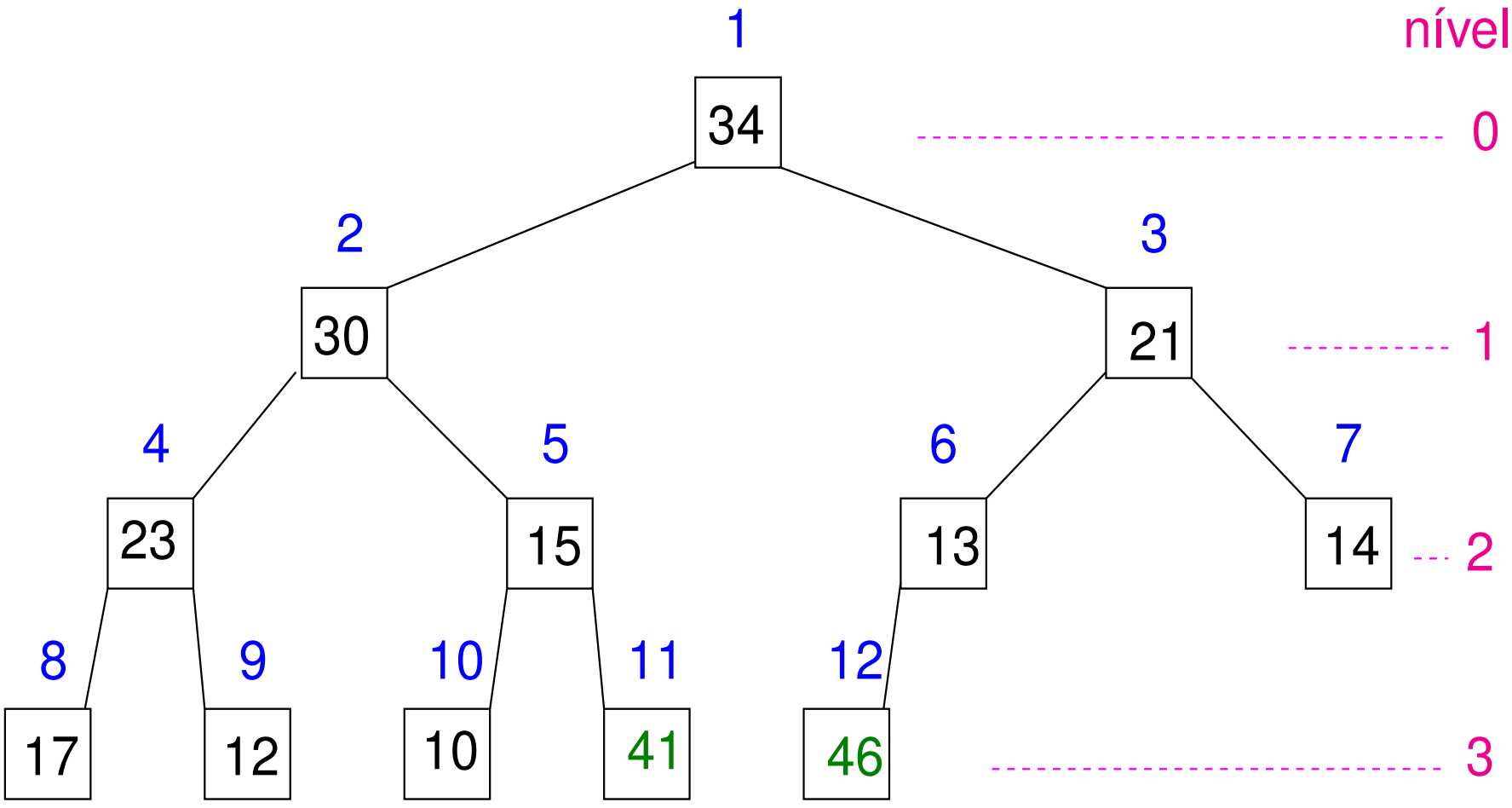
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
34	30	13	23	15	21	14	17	12	10	41	46

HeapSort



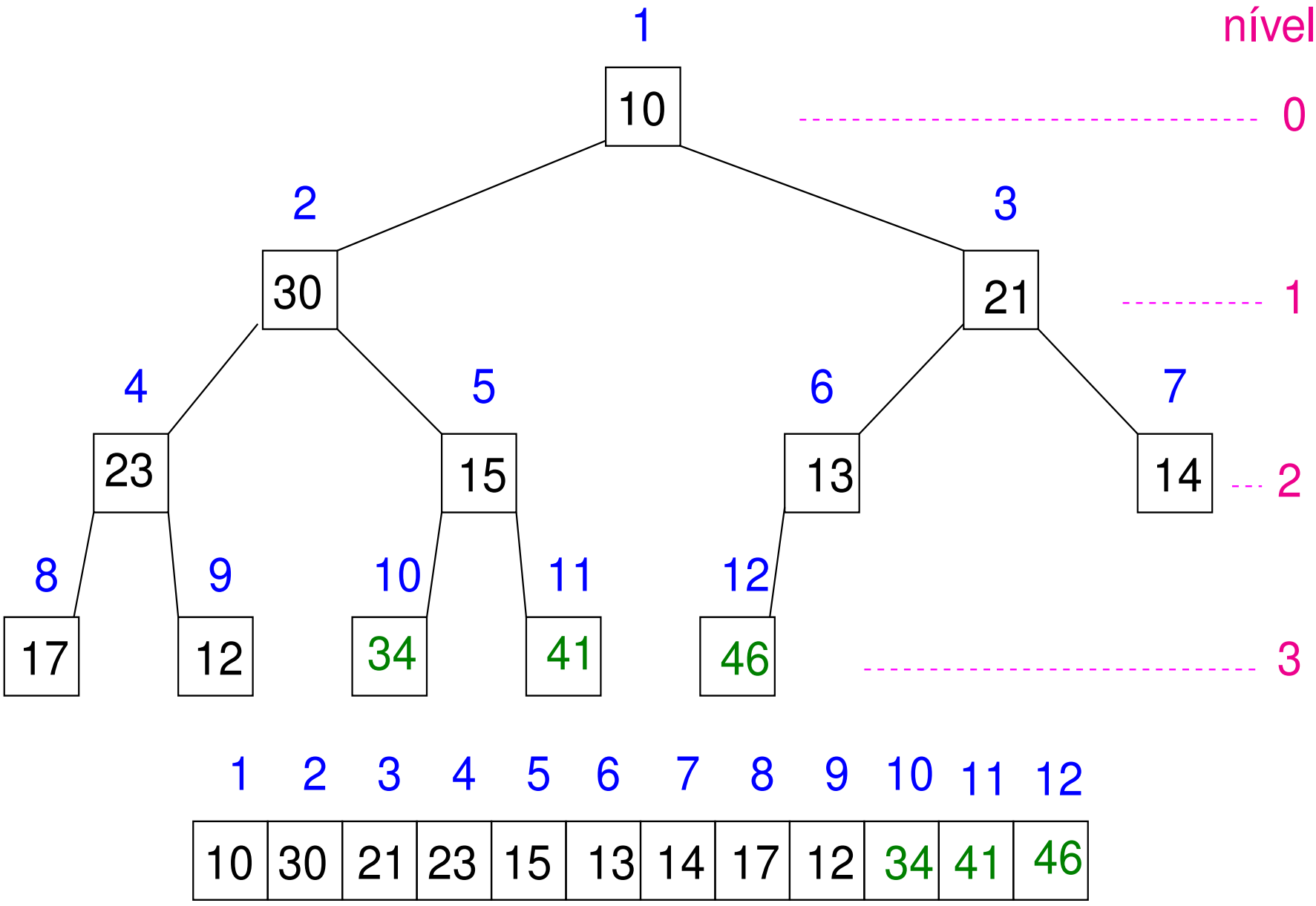
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
34	30	21	23	15	13	14	17	12	10	41	46

HeapSort

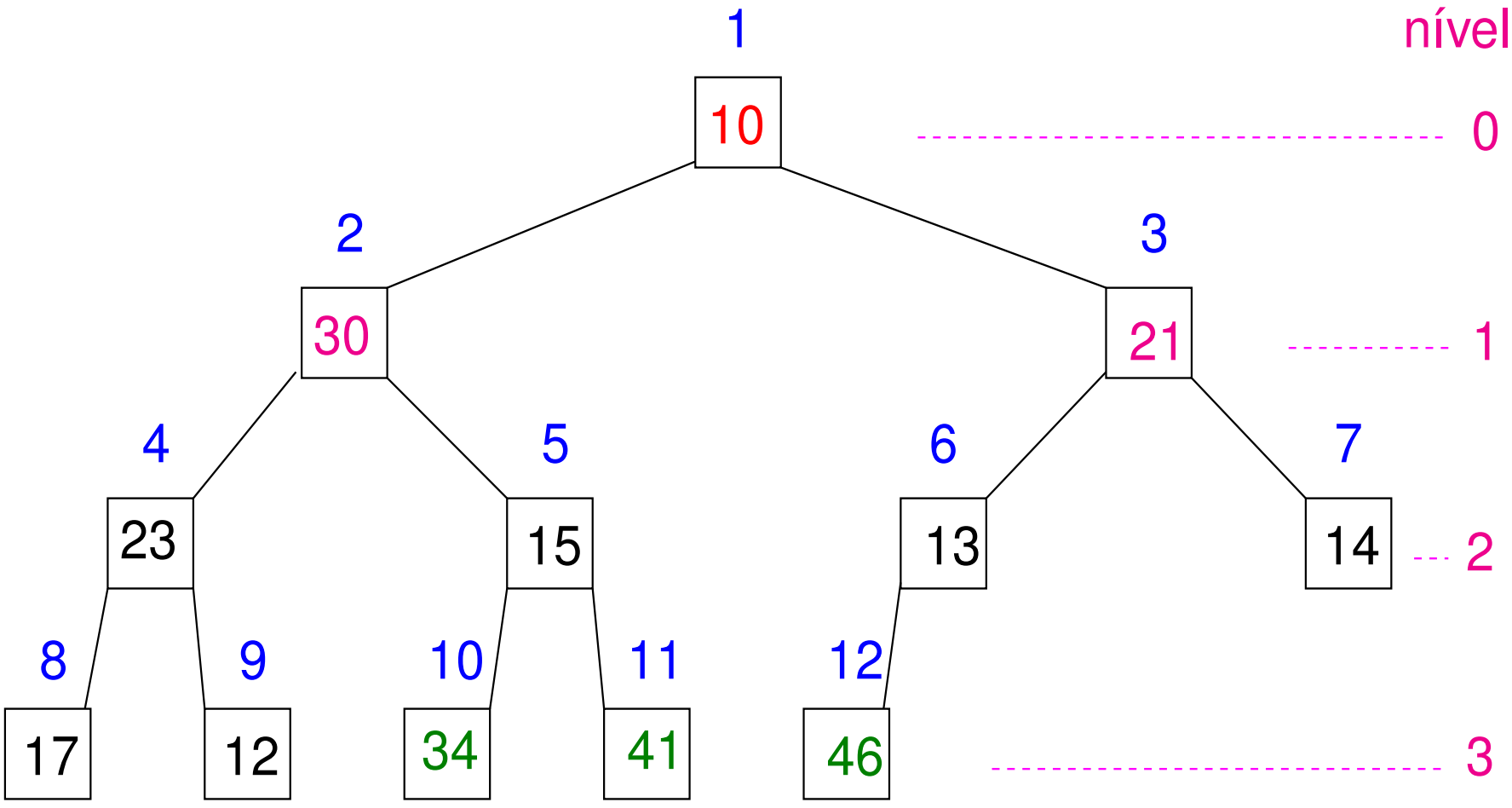


1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
34	30	21	23	15	13	14	17	12	10	41	46

HeapSort

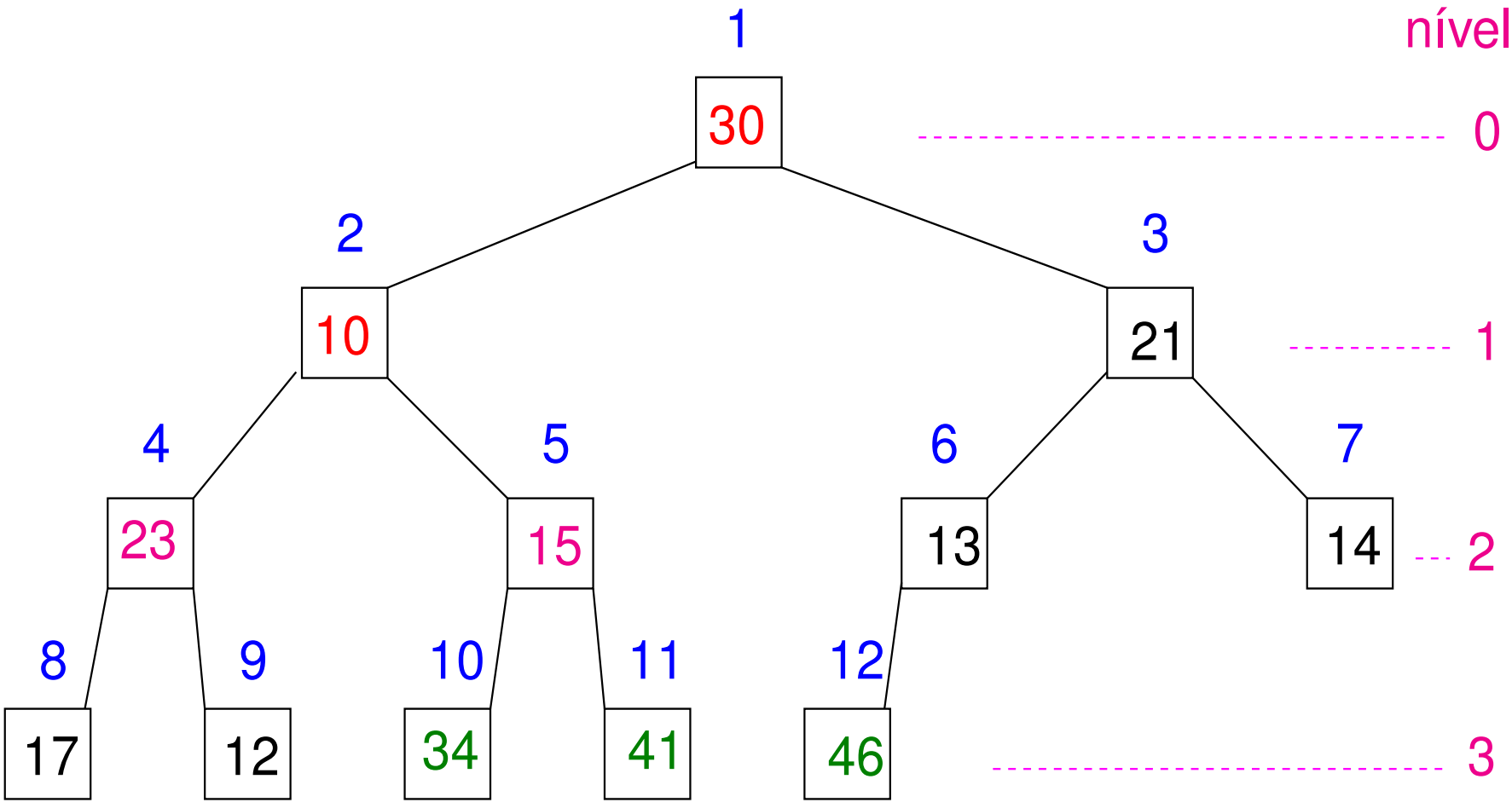

1
nível
10
0
2
3
30
21
1
4
5
6
7
23
15
13
14
2
8
9
10
11
12
17
12
34
41
46
3
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
10 30 21 23 15 13 14 17 12 34 41 46

HeapSort



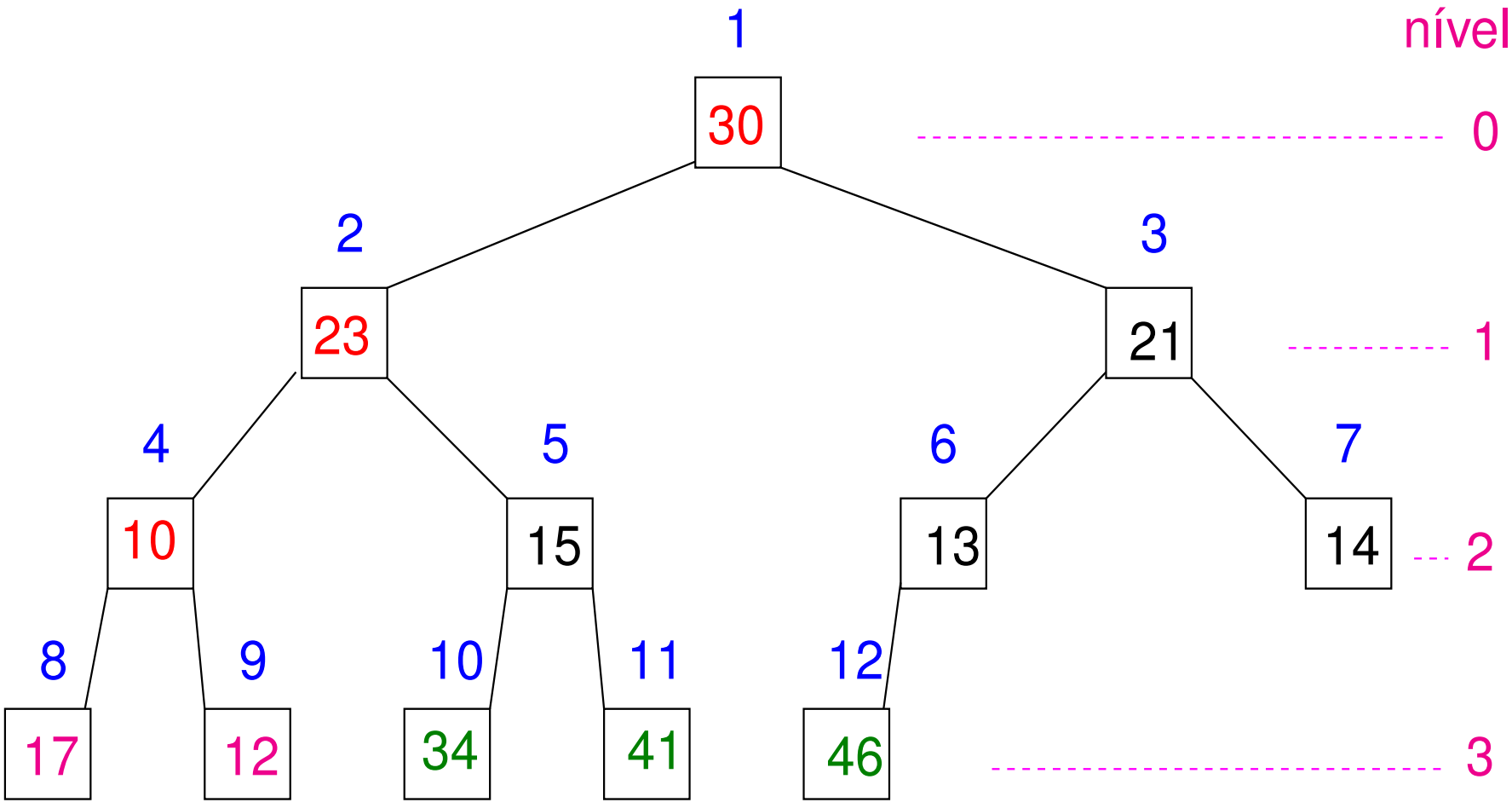
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10	30	21	23	15	13	14	17	12	34	41	46

HeapSort



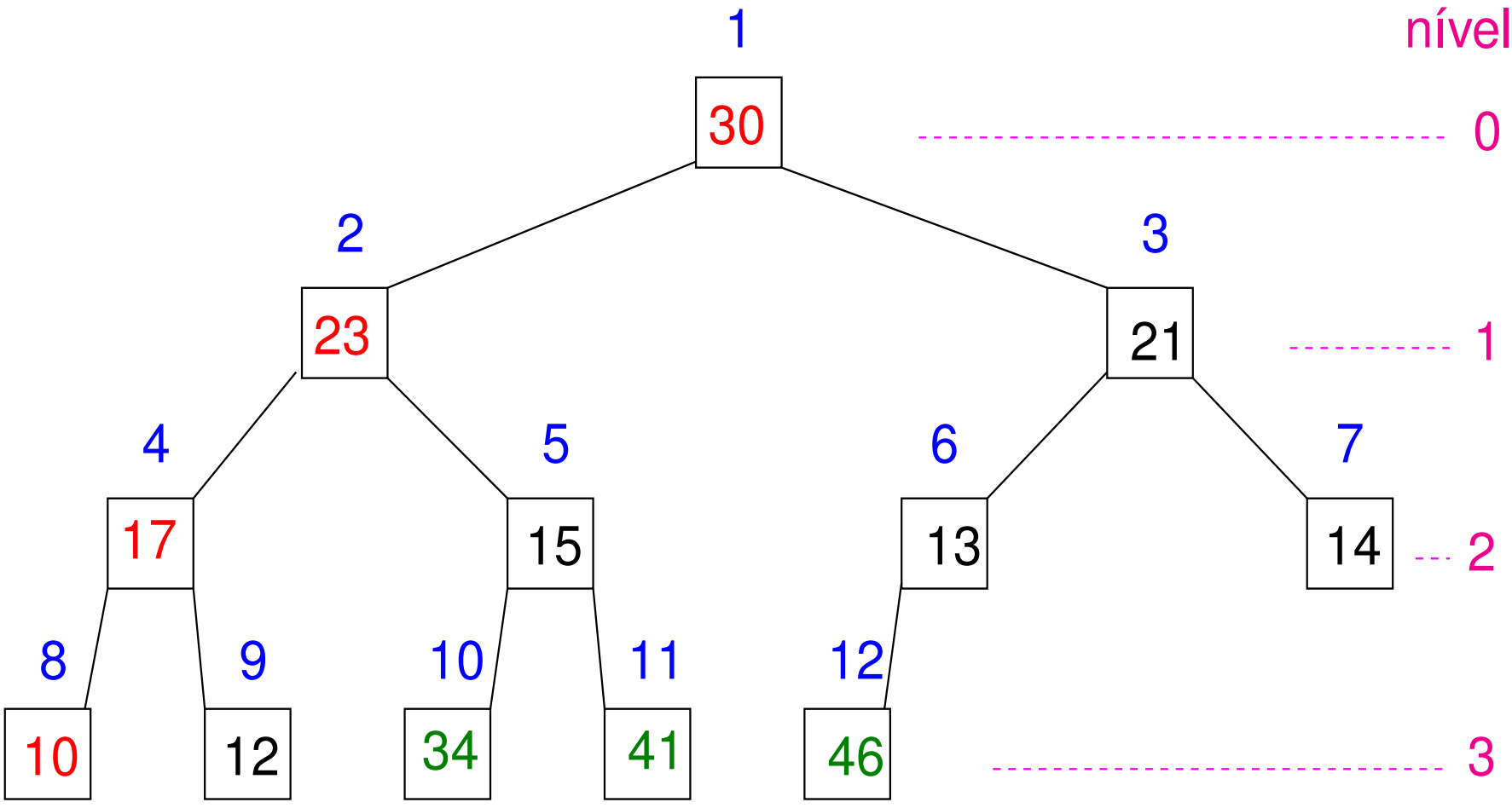
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
30	10	21	23	15	13	14	17	12	34	41	46

HeapSort



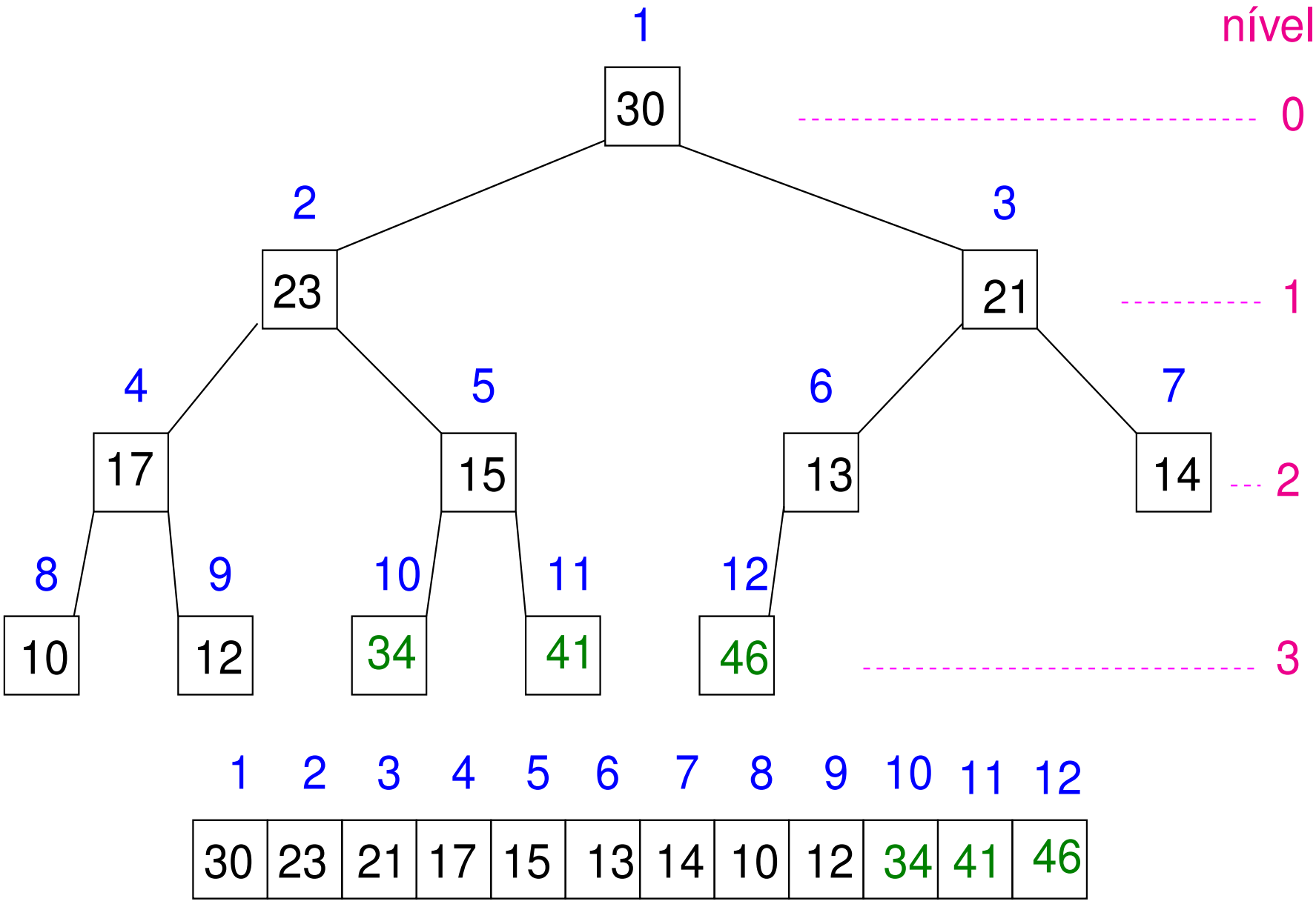
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
30	23	21	10	15	13	14	17	12	34	41	46

HeapSort

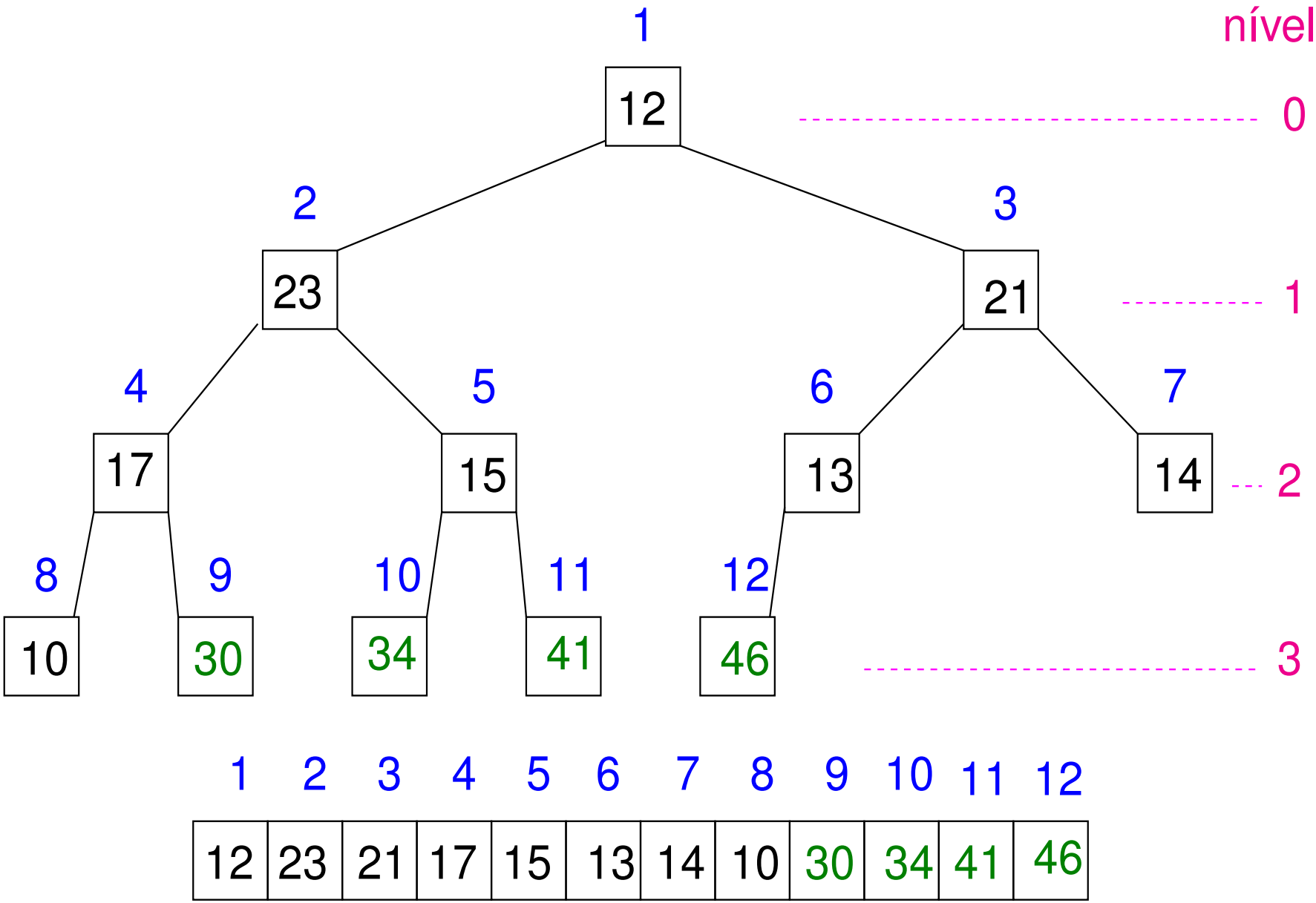


1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
30	23	21	17	15	13	14	10	12	34	41	46

HeapSort


1
nível
30
0
2
3
23
21
1
4
5
6
7
17
15
13
14
2
8
9
10
11
12
10
12
34
41
46
3
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
30 23 21 17 15 13 14 10 12 34 41 46

HeapSort


1
nível
12
0
2
3
23
21
1
4
5
6
7
17
15
13
14
2
8
9
10
11
12
10
30
34
41
46
3
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
12 23 21 17 15 13 14 10 30 34 41 46

HeapSort

Algoritmo rearranja $A[1 \ldots n]$ em ordem crescente.

	HEAPSORT(A, n)	Tempo
1	BUILD-MAX-HEAP(A, n)	?
2	$m \leftarrow n$	?
3	**para** $i \leftarrow n$ **decrescendo até** 2 **faça**	?
4	$A[1] \leftrightarrow A[i]$	?
5	$m \leftarrow m - 1$	?
6	MAX-HEAPIFY$(A, m, 1)$	?

$T(n) =$ complexidade de tempo no pior caso

HeapSort

Algoritmo rearranja $A[1 \ldots n]$ em ordem crescente.

HEAPSORT(A, n)	Tempo
1 BUILD-MAX-HEAP(A, n)	$\Theta(n)$
2 $m \leftarrow n$	$\Theta(1)$
3 **para** $i \leftarrow n$ **decrescendo até** 2 **faça**	$\Theta(n)$
4 $A[1] \leftrightarrow A[i]$	$\Theta(n)$
5 $m \leftarrow m - 1$	$\Theta(n)$
6 MAX-HEAPIFY$(A, m, 1)$	$nO(\lg n)$

$T(n) = ??$ $T(n) = nO(\lg n) + \Theta(4n + 1) = O(n \lg n)$

A complexidade de HEAPSORT no pior caso é $O(n \lg n)$.

Como seria a complexidade de tempo no melhor caso?

Filas com prioridades

Uma fila com prioridades é um tipo abstrato de dados que consiste de uma coleção S de itens, cada um com um valor ou prioridade associada.

Algumas operações típicas em uma fila com prioridades são:

MAXIMUM(S): devolve o elemento de S com a maior prioridade;

EXTRACT-MAX(S): remove e devolve o elemento em S com a maior prioridade;

INCREASE-KEY(S, x, p): aumenta o valor da prioridade do elemento x para p; e

INSERT(S, x, p): insere o elemento x em S com prioridade p.

Implementação com max-heap

HEAP-MAX(A, n)
1 **devolva** $A[1]$

Complexidade de tempo: $\Theta(1)$.

HEAP-EXTRACT-MAX(A, n)
1 $\triangleright$ $n \geq 1$
2 max $\leftarrow$ $A[1]$
3 $A[1] \leftarrow A[n]$
4 `cor` $\leftarrow n - 1$
5 MAX-HEAPIFY (A, n, 1)
6 **devolva** max

Complexidade de tempo: $O(\lg n)$.

Implementação com max-heap

HEAP-INCREASE-KEY($A, i, prior$)
1 ▷ Supõe que $prior \geq A[i]$
2 $A[i] \leftarrow prior$
3 **enquanto** $i > 1$ e $A[\lfloor i/2 \rfloor] < A[i]$ **faça**
4 $A[i] \leftrightarrow A[\lfloor i/2 \rfloor]$
5 $i \leftarrow \lfloor i/2 \rfloor$

Complexidade de tempo: $O(\lg n)$.

MAX-HEAP-INSERT($A, n, prior$)
1 $n \leftarrow n + 1$
2 $A[n] \leftarrow -\infty$
3 HEAP-INCREASE-KEY($A, n, prior$)

Complexidade de tempo: $O(\lg n)$.