Capítulo 10

Rotação

Neste capítulo vamos estudar o movimento de rotação de corpos rígidos sobre um eixo fixo. Para descrever esse tipo de movimento, vamos introduzir os seguintes conceitos novos:

-Deslocamento angular

-Velocidade angular instantânea média e (símbolo: $\boldsymbol{\omega}$)

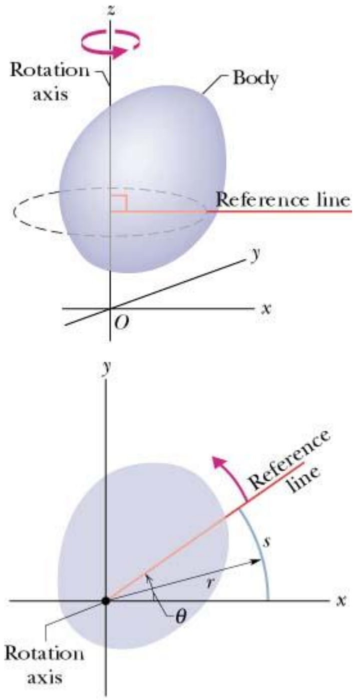
-Aceleração angular média e instantânea (símbolo: $\boldsymbol{\alpha}$)

-Momento de inércia (símbolo $\boldsymbol{I}$)

-Torque (símbolo $\boldsymbol{\tau}$)

Também vamos aprender a calcular a energia cinética associada à rotação, escrever a segunda lei de Newton para o movimento de rotação e introduzir a energia cinética e o trabalho para o movimento de rotação

As variáveis de rotação (10-2)

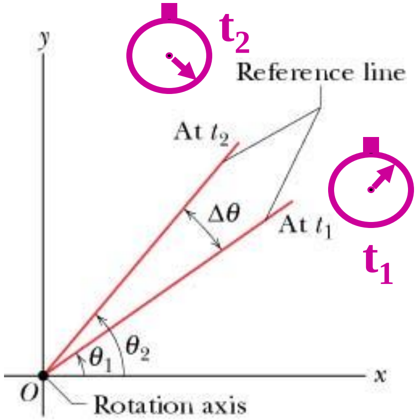


Neste capítulo vamos estudar o movimento de rotação de corpos rígidos em torno de eixos fixos. O corpo **rígido** é definido como aquele que pode girar com todas as suas partes fixas e em conjunto e sem qualquer alteração da sua forma. O eixo **fixo** significa que o objeto roda em torno de um eixo que não se move. Podemos descrever o movimento de um corpo rígido rotação em torno de um eixo fixo, especificando apenas **um** parâmetro. Considere o corpo rígido da figura ao lado.

Tomamos o do eixo z para ser o eixo fixo de rotação. Nós definir uma linha de referência que é fixada no corpo rígido e é perpendicular ao eixo de rotação. Uma vista do topo é mostrado na parte inferior da figura. A posição angular da linha de referência a qualquer momento *t* é definido pelo ângulo $\theta(t)$ que faz com que as linhas de referência com a posição em $t = 0$. O ângulo $\theta(t)$ também define a posição de todos os pontos no corpo rígido, porque todos os pontos estão bloqueados como eles rodam. O ângulo θ está relacionada com o comprimento do arco s percorrida por um ponto a uma distância *r* a partir do eixo através da equação:

$$\theta = \frac{s}{r}$$

Nota: O ângulo θ é medido em **radianos**



Deslocamento Angular

No quadro que mostra a linha de referência a um tempo t_1 e num momento posterior t_2. Entre t_1 e t_2, corpo sofre um deslocamento angular, $\Delta\theta=\theta_2-\theta_1$, Todos os pontos do corpo rígido têm o mesmo deslocamento angular, porque eles girar presos juntos.

Velocidade Angular

Definimos como velocidade angular médio para o intervalo de tempo (t_1, t_2) a relação

$$\omega_{avg} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

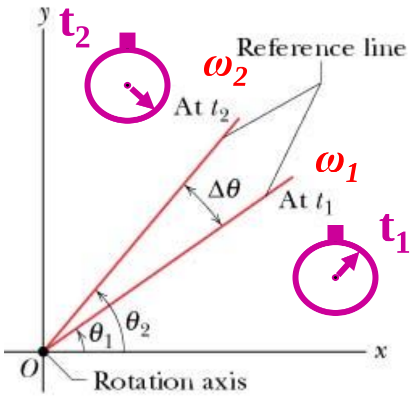
A unidade SI para a velocidade angular é radianos / segundo

Nós definimos como a velocidade angular instantânea como:

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \text{ as } \Delta t \to 0 \quad \text{ou} \quad \omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad \text{ou} \quad \boxed{\omega = \frac{d\theta}{dt}}$$

Sinal algébrico da frequência angular:

Se um corpo rígido gira anti-horário ω tem um sinal positivo. Se, por outro lado a rotação é no sentido horário ω tem um sinal negativo



Aceleração Angular

Se a velocidade angular de um objeto rotativas alterações rígidas com o tempo podemos descrever a taxa de variação de ω definindo a aceleração angular.

Na figura é mostrada a linha de referência, uma vez t_1 e numa altura posterior t_2. A velocidade angular do corpo rotativo é igual para ω_1 em t_1 e ω_2 em t_2. Definimos como aceleração angular médio para o intervalo de tempo (t_1, t_2) a relação:

$$\alpha_{avg} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

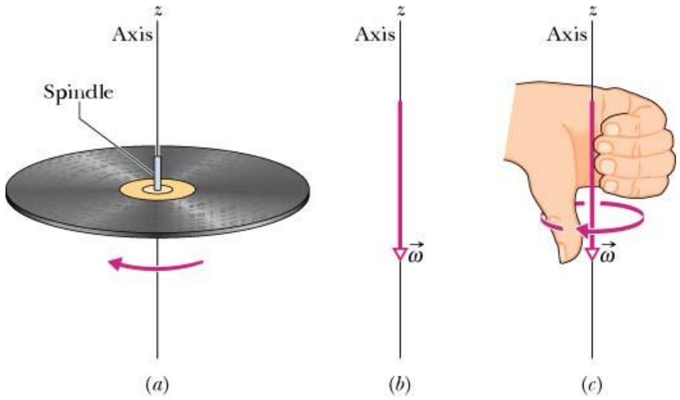
A unidade SI para a velocidade angular é radianos / segundo^2

Nós definimos como a aceleração angular instantânea como:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

ou

$$\boxed{\alpha = \frac{d\omega}{dt}}$$



Vetor velocidade angular

Para rotações de corpos rígidos sobre um eixo fixo podemos descrever com precisão a velocidade angular por designação de um sinal algébrica. Positivo para anti-horário e negativo para rotação no sentido horário

Na verdade, podemos usar a notação de vetor para descrever o movimento de rotação que é mais complicada. O vector de velocidade angular é definida como se segue:

A direção de $\vec{\omega}$ é ao longo do eixo de rotação.
O sentido de $\vec{\omega}$ é definido pela regra da mão direita
Regra da mão direita: Fechar a mão direita de modo que os dedos apontam na direção da rotação. O polegar da mão direita dá a sensação de $\vec{\omega}$

Rotação com aceleração angular constante

Quando a aceleração angular α é constante, podemos derivar expressões simples que nos dão a velocidade angular ω e a posição angular θ em função do tempo. Nós poderíamos derivar essas equações da mesma forma que fizemos no capítulo 2. Em vez disso, simplesmente escrever as soluções, explorando a analogia entre translacional e o movimento de rotação usando o seguinte correspondência entre os dois movimentos

Movimento de translação x Movimento de rotação

$$x \leftrightarrow \theta$$

$$v \leftrightarrow \omega$$

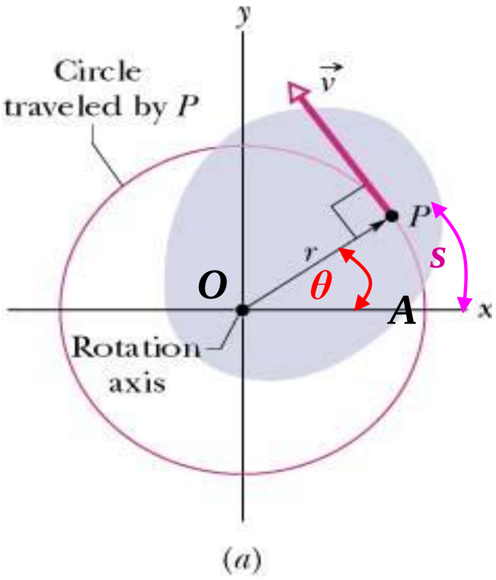
$$a \leftrightarrow \alpha$$

$$v = v_0 + at \quad \leftrightarrow \quad \omega = \omega_0 + \alpha t \qquad \text{(eqs.1)}$$

$$x = x_o + v_o t + \frac{at^2}{2} \quad \leftrightarrow \quad \theta = \theta + \omega_o t + \frac{\alpha t^2}{2} \qquad \text{(eqs.2)}$$

$$v^2 - v_o^2 = 2a\left(x - x_o\right) \quad \leftrightarrow \quad \omega^2 - \omega_o^2 = 2\alpha\left(\theta - \theta_o\right) \qquad \text{(eqs.3)}$$

Relacionando as variáveis lineares e angulares



Considere um ponto P sobre um corpo rígido girando sobre um eixo fixo. Em t =0 a linha de referência, que liga a origem com O ponto P está no eixo x (ponto A).

Durante um intervalo de tempo, o ponto P se move ao longo do arco AP e percorre uma distância s. Ao mesmo tempo, a referência linha OP gira por um ângulo θ.

Relação entre a velocidade angular e a velocidade

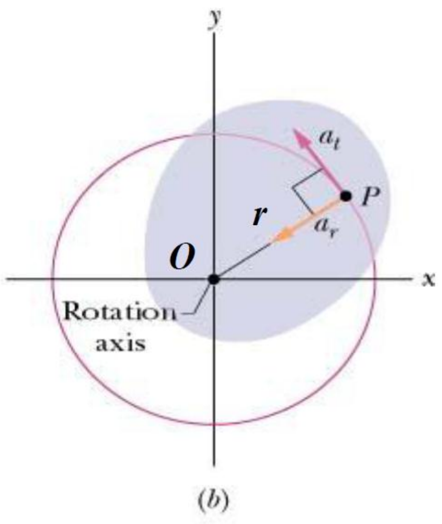
O comprimento de arco s e o ângulo θ estão ligados pela equação: $s = r\theta$

onde r é a distância OP.

A velocidade do ponto P é: $v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(r\theta)}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}$ ou $\boxed{v = r\omega}$

O período revolução T é dada por: $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$ como $\boxed{T = \frac{1}{f}}$

Então: $\boxed{\omega = 2\pi f}$



A aceleração

A aceleração do ponto P é um vetor que tem duas componentes. A componente "radial" ao longo do raio r é apontando para o ponto O. Esta componente já foi vista no capítulo 4, onde chamamos aceleração "centrípeta". A sua magnitude é:

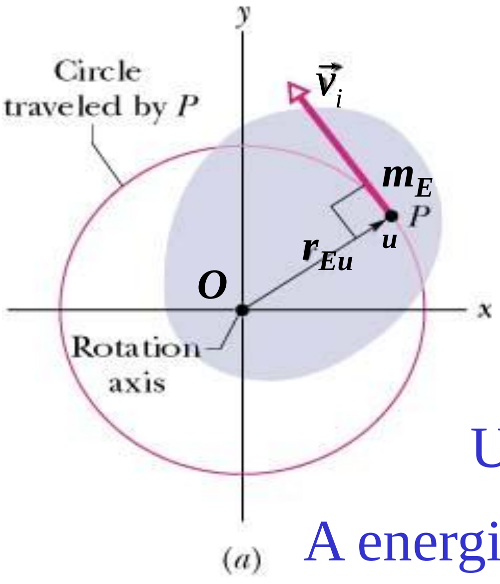
$$\boxed{a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r}$$

A segunda componente é ao longo da tangente ao caminho circular de P e é assim conhecido como a componente "tangencial". A sua magnitude é:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega r)}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha \qquad \boxed{a_t = r\alpha}$$

A magnitude do vector de aceleração é: $a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2}$

(10-8)



Energia cinética de rotação

Considere o corpo rotativo rígida mostrado na figura ao lado. Dividimos o corpo em partes de massas m_1, m_2, m_3, ..., m_i, ...

Uma parte (ou "elemento") em P tem um índice i e massa m

A energia cinética de rotação é a soma da energia cinética das partes, ou: $K = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2 + \ldots$ $K = \sum_i \frac{1}{2}m_iv_i^2$

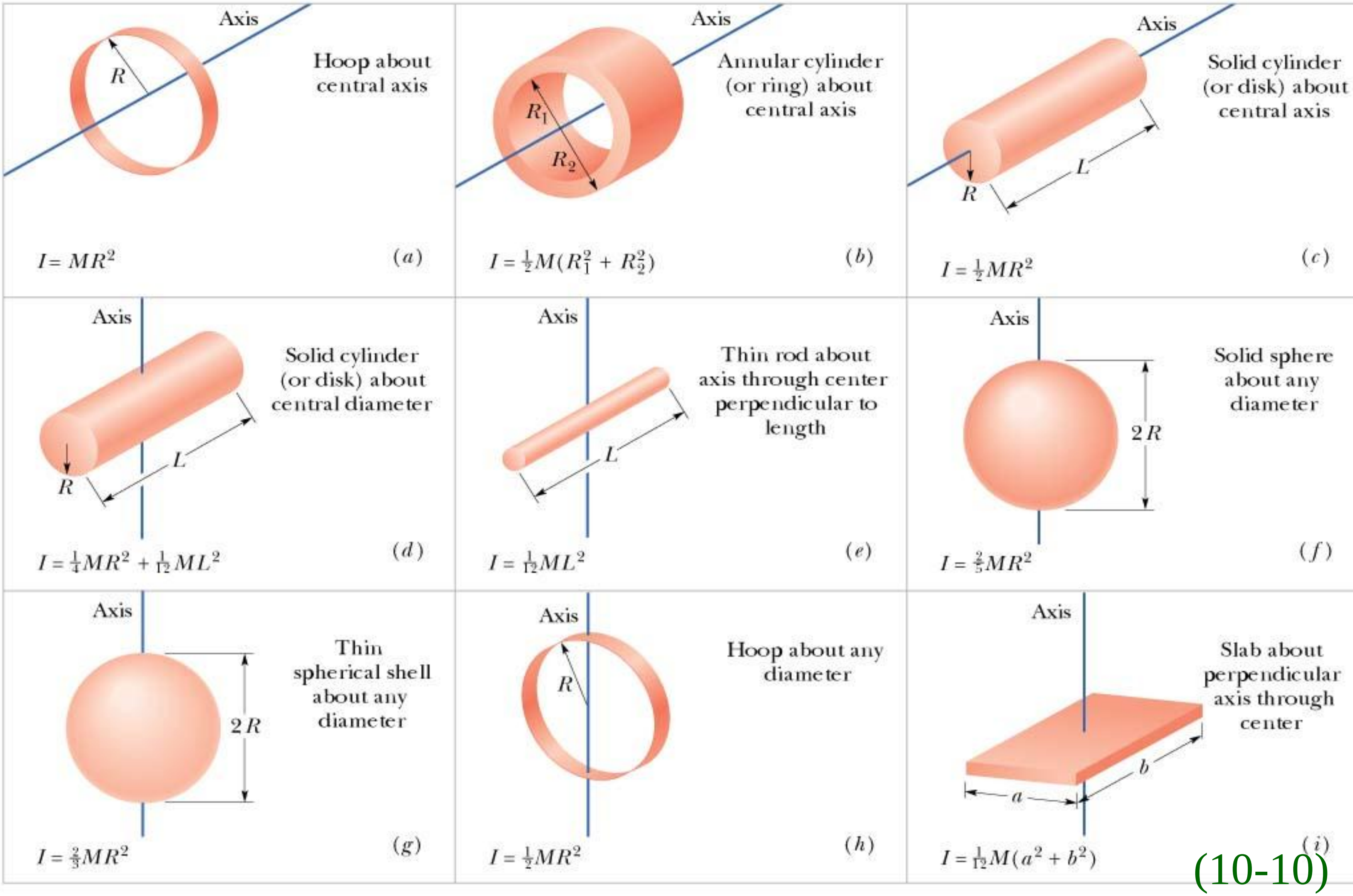
A velocidade do i-ésimo elemento é: $v_i = \omega r_i \rightarrow K = \sum_i \frac{1}{2}m_i\left(\omega r_i\right)^2$

$K = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_ir_i^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$ O termo $I = \sum_i m_ir_i^2$ é conhecido como momento de inércia em torno do eixo de rotação. O eixo de rotação deve ser especificado porque o valor de I para um corpo rígido depende da sua massa, a sua forma, bem como sobre a posição do eixo de rotação. O momento inércia de um objeto descreve como a massa é distribuída sobre o eixo de rotação

$$\boxed{I = \sum_i m_ir_i^2} \qquad \boxed{I = \int r^2 dm} \qquad \boxed{K = \frac{1}{2}I\omega^2} \qquad (10\text{-}9)$$

Na tabela abaixo listamos as inércias rotacionais para alguns corpos rígidos

$$\boxed{I = \int r^2 dm}$$

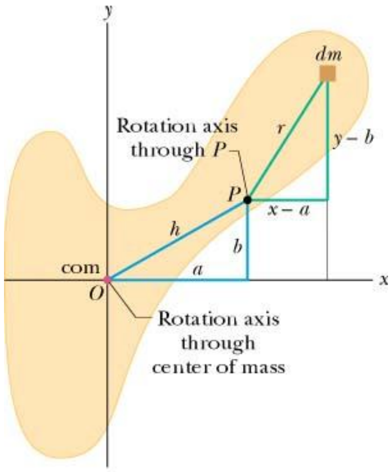


Cálculo do momento de inércia

O momento de inércia é dado por: $I = \sum_i m_i r_i^2$ Esta expressão é útil para um corpo rígido que tem um distribuição discreto de massa.

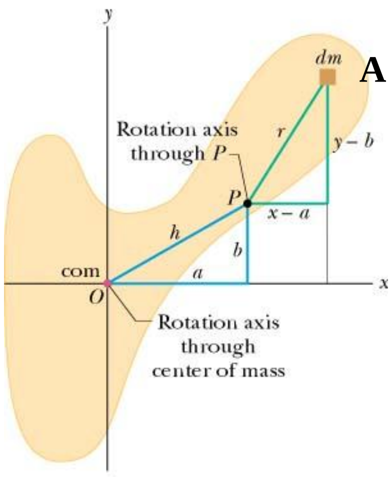
Para uma distribuição contínua de massa a soma torna-se uma integral

$$I = \int r^2 dm$$



Vimos anteriormente que I depende da posição do eixo de rotação Para um novo eixo que deve recalcular a integral para I.
O método mais simples tira partido do teorema eixo paralelo.
Considere o corpo rígido de massa M mostrado na figura ao lado.
Nós assumimos que sabemos que o momento de inércia I com em torno do eixo de rotação um que passa através do centro de massa S e é perpendicular à página. O momento de inércia I sobre um eixo paralelo ao eixo por meio de S que passa através do ponto P, uma distância h de O é dada pela equação:

$$\boxed{I = I_{com} + Mh^2}$$



Prova do Teorema do Eixo Paralelo

- Tomamos a origem O para coincidir com o centro de massa do corpo rígido mostrado na figura. Nós assumimos que sabemos que o momento de inércia I_{com} para um eixo que é perpendicular à página e passa através de O.

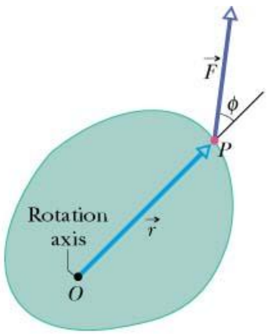
Queremos calcular o momento de ineria I sobre um eixo perpendicular à página e passa pelo ponto P com coordenadas (a,b). Considerar um elemento de massa dm no ponto A com coordenadas (x,y). A distância r entre os pontos A e P é o seguinte: $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$

A inércia de rotação sobre P é: $I = \int r^2 dm = \int \left[(x-a)^2 + (y-b)^2 \right] dm$

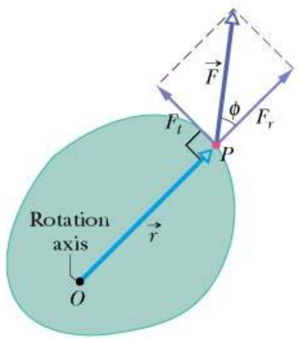
$$I = \int \left(x^2 + y^2 \right) dm - 2a \int x dm - 2b \int y dm - \int \left(a^2 + b^2 \right) dm$$

O segundo e o terceiro termo da integral são zero. A primeira integral é $I_{com.}$. O termo $\left(a^2 + b^2 \right) = h^2$ Assim o quarto termo fica:

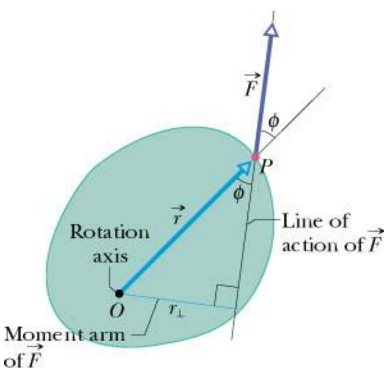
$$h^2 \int dm = Mh^2 \rightarrow \boxed{I = I_{com} + Mh^2} \qquad (10\text{-}12)$$



(a)



(b)



(c)

$$\boxed{\tau = r_\perp F}$$

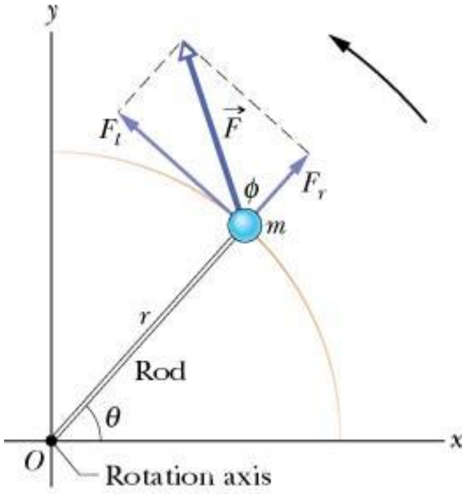
Torque

Na figura A ao lado é mostrado um corpo que pode girar em torno de um eixo que passa O ponto sob a ação de uma força F aplicada no ponto P a uma distância r de O. Na Figura b separamos F em duas componentes, radial e tangencial. O componente radial F_r não pode causar qualquer rotação porque atua ao longo de uma linha que passa através de O. A tangencial componente F_t = Fsin(ϕ) por outro lado faz com que a rotação do objeto em torno de O. A capacidade de F para rodar o corpo depende da magnitude F_t e também sobre a distância r entre os pontos P e A. Assim, podemos definir como torque:

$$\tau = rF_t = rF\sin\phi = r_\perp F$$

A distância $r_\perp$ é conhecido como o braço de momento e é o distância perpendicular entre o ponto O e o vetor F. O sinal algébrico do binário é atribuído como se segue:

- Se uma força F tende a girar um objeto no anti-horário o sinal de direção é positiva.
- Se uma força F tende a girar uma objeto no sentido horário o sinal é negativo.



Segunda Lei de Newton para a Rotação

Para a segunda lei de movimento de translação de Newton liga a força que atua sobre uma partícula com a aceleração resultante. Há uma relação semelhante entre o torque de uma força aplicado sobre um objeto rígido e a aceleração angular resultante.

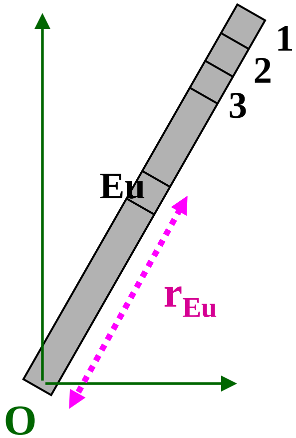
Esta equação é conhecida como segunda lei de Newton para a rotação. Vamos explorar esta lei, estudando um corpo simples que consiste em um ponto de massa m no final de uma haste sem massa de comprimento r. Uma força F é aplicada sobre a partícula e gira o sistema torno de um eixo na origem. Como fizemos anteriormente, vamos resolver em um F tangencial e uma componente radial. O componente tangencial é responsável para a rotação. Nós primeiro aplicar a segunda lei de Newton para F_t. $F_t=ma_t$ (eq 1). O torque da agindo sobre a partícula é: $\tau=rF_t$ (eq 2). Nos eliminamos F_t nas equações

$$\tau = ma_t r = m(\alpha r)r = (mr^2)\alpha = I\alpha$$

$$\boxed{\tau = I\alpha}$$

(compare com F=ma)

(10-14)



Segunda Lei de Newton para a Rotação

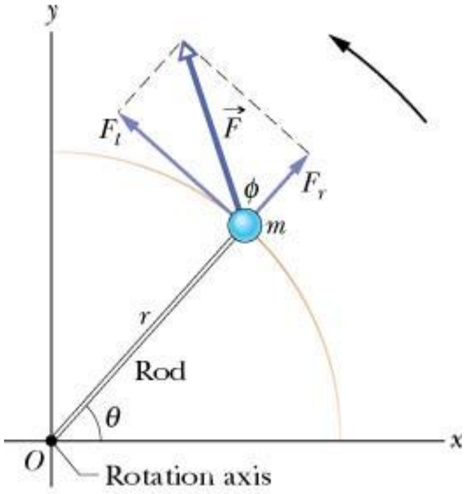
Temos derivada segunda lei de Newton para rotação para um caso especial. Um corpo rígido que consiste de um ponto massa m na extremidade de uma barra sem massa de comprimento r. Iremos agora derivar a mesma equação para um caso geral.

Considere o objeto da haste como mostrado na figura, que pode rodar em torno de um eixo pelo ponto O sobre a ação de um torque líquido $\tau_{\text{líquido}}$. Dividimos o corpo em peças ou "elementos" e identifica-los. Os elementos têm massas m_1,m_2, m_3, ..., m_n e eles estão localizados a distâncias r_1, r_2, r_3, ..., r_n de O. Nós aplicamos segundo Newton lei para a rotação de cada elemento: $\tau_1 = I_1\alpha$ (eqs.1), $\tau_2 = I_2\alpha$ (eqs.2), $\tau_3 = I_3\alpha$ (eqs.3), etc. Se somarmos todas essas equações, temos:

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \ldots + \tau_n = \left(I_1 + I_2 + I_3 + \ldots + I_n\right)\alpha.$$

Aqui I_i é o momento de inércia do i-ésimo elemento. A soma $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \ldots + \tau_n$ é o torque líquido aplicadas. A soma $I_1 + I_2 + I_3 + I_n$ é o momento de inércia I do corpo. Assim vamos acabar com a equação:

$$\boxed{\tau_{net} = I\alpha}$$



Trabalho e energia cinética de rotação $\boxed{W = \Delta K}$

No capítulo 7 vimos que se uma força faz trabalho W sobre um objeto, isso resulta em uma mudança de sua energia cinética ΔK=W. De um modo semelhante, quando um torque faz trabalho W em um corpo em rotação rígida, ela muda a sua cinética de rotação energia na mesma quantidade:

Considere o corpo simples rígido mostrado na figura acima, que consiste numa massa m na extremidade de uma barra sem massa de comprimento r. A força F faz trabalho dW =F_t rdθ. O componente radial F_r faz trabalho zero, porque é em ângulo reto com o movimento. O trabalho é igual a:

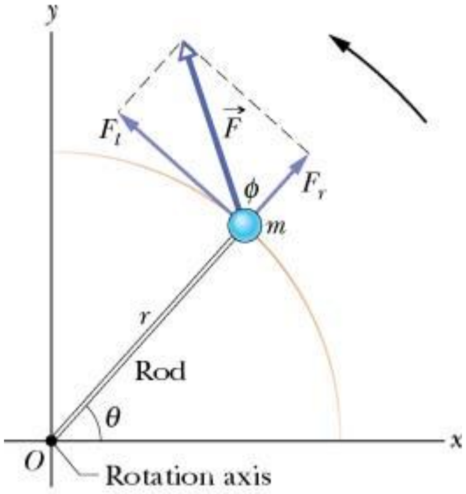
$$W = \int F_t r d\theta = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta.$$

em virtude do teorema da energia cinética que o trabalho têm uma variação da energia cinética:

$$\Delta K = W = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} m r^2 \omega_f^2 - \frac{1}{2} m r^2 \omega_i^2 \rightarrow \quad W = \Delta K$$

$$\boxed{\Delta K = \frac{1}{2} I\omega_f^2 - \frac{1}{2} I\omega_i^2}$$

$$\boxed{W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta}$$



Potência

A energia foi definida como a taxa a que o trabalho é feito por uma força e, no caso de movimento de rotação por um torque. Vimos que um torque produz trabalho $dW = F_t\, r d\theta$ como gira um objeto por um ângulo $d\theta$.

Abaixo, um resumo dos resultados do teorema da energia cinética de rotação trabalho:

$$\boxed{W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta}$$

$$W = \tau\left(\theta_f - \theta_i\right)$$ Para torque constante

$$\boxed{W = \Delta K = \frac{1}{2} I\omega_f^2 - \frac{1}{2} I\omega_i^2}$$

Trabalho-rotação Teorema Energia Cinética

$$\boxed{P = \tau\omega}$$

Analogias entre o movimento de translação e rotação

Movimento de translação - Movimento de rotação

$$x \leftrightarrow \theta$$

$$v \leftrightarrow \omega$$

$$a \leftrightarrow \alpha$$

$$v = v_0 + at \leftrightarrow \omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$x = x_o + v_o t + \frac{at^2}{2} \leftrightarrow \theta = \theta_o + \omega_o t + \frac{\alpha t^2}{2}$$

$$v^2 - v_o^2 = 2a\left(x - x_o\right) \leftrightarrow \omega^2 - \omega_o^2 = 2\alpha\left(\theta - \theta_o\right)$$

$$K = \frac{mv^2}{2} \leftrightarrow K = \frac{I\omega^2}{2}$$

$$m \leftrightarrow I$$

$$F = ma \leftrightarrow \tau = I\alpha$$

$$F \leftrightarrow \tau$$

$$P = Fv \leftrightarrow P = \tau\omega$$