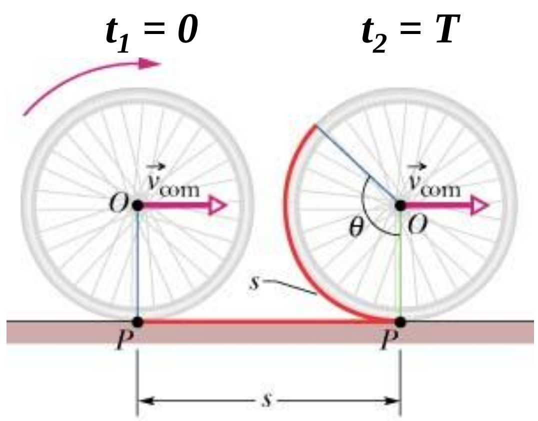
Capítulo 11

Rolamento, Momentum Angular e Torque

Neste capítulo vamos abordar os seguintes tópicos:

- Rolamento de objetos circulares e sua relação com o atrito;
- Redefinição de torque como um vetor para descrever os problemas de rotação que são mais complicados do que a rotação de um corpo rígido sobre um eixo;
- Momento Angular fixo de partículas individuais e de um sistemas,
- Segunda lei de Newton para rotação;
- Conservação de momentum angular;
- Aplicações da conservação do momento angular;

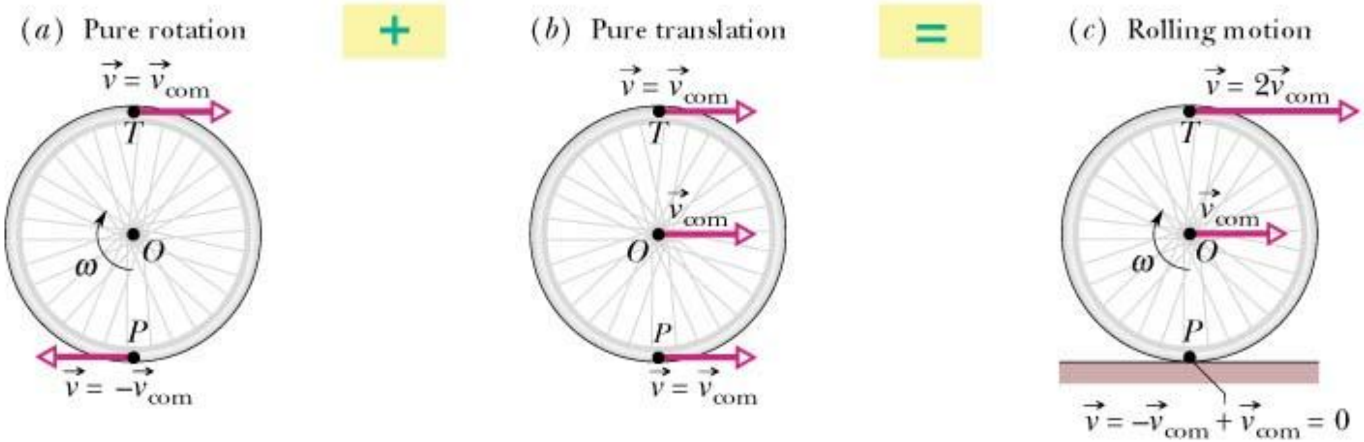


Rolamento como translação e rotação combinada

Considere um objeto com seção transversal circular que rola ao longo de uma superfície sem escorregamento. Este movimento, embora comum, é complicado. Podemos simplificar o seu estudo, tratando-o como uma combinação de translação do seu centro de massa e de rotação do objeto sobre o centro de massa

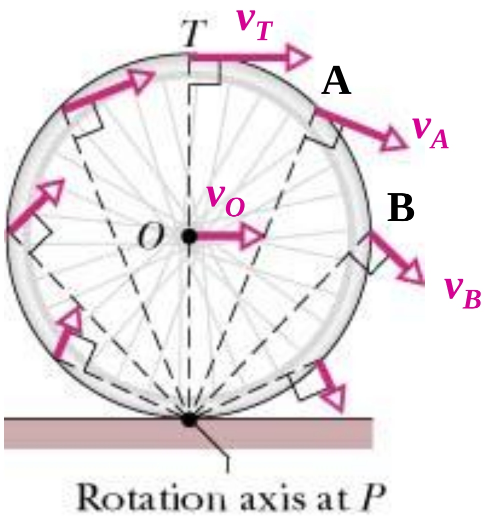
Considere dois instantâneos de uma roda de bicicleta em rolamento como na figura acima. Um observador estacionário com o solo irá ver o centro de massa S da roda avançar com uma velocidade v_{CM}. O ponto P em que a roda faz contato com a estrada também se move com a mesma velocidade. Durante o intervalo de tempo entre os dois instantâneos ambos O e P cobrem uma distância s. v_{CM}=ds/dt (Eqs.1). Durante t o ciclista vê a roda girar de um ângulo θ sobre O de modo que s=Rθ -> ds/dt=Rdθ/dt=ω (Eqs.2). Se combinamos a equação 1 com a equação 2 obtemos a condição para roda rolar sem escorregar é.

$$\boxed{v_{com} = R\omega} \qquad (11\text{-}2)$$



$$\boxed{v_{CM} = R\omega}$$

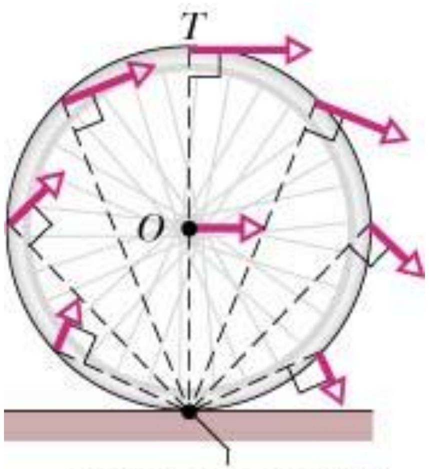
Rolamento é uma combinação de movimento puramente translacional com uma velocidade e um movimento puramente rotacional sobre o centro de massa v_{CM} com velocidade angular $\omega = v_{CM}/R$. A velocidade de cada ponto é a soma dos vectores das velocidades dos dois movimentos. Para o movimento de translação o vector de velocidade é a mesma para cada ponto (v_{CM} , ver fig.b). A velocidade rotação varia de ponto a ponto. A sua magnitude é igual a ωr para ronde r é a distância do ponto até O. A sua orientação é tangente à órbita circular (ver fig a). A velocidade final é a soma vetorial destes dois termos. Por exemplo, a velocidade do ponto P é sempre zero. A velocidade do centro de massa O é v_{CM} (r=0). Finalmente, a velocidade do ponto T é superior a igual a 2 v_{CM}.



Rolamento como rotação pura

Outra forma de olhar para rolamento é mostrado na figura ao lado. Nós consideramos rolamento como uma rotação perfeita em torno de um eixo de rotação que passa através do ponto de contato P entre a roda e a estrada. A velocidade angular de rotação é $\omega = v_{CM}/R$.

A fim de definir o vector de velocidade para cada ponto, deve conhecer a sua magnitude bem como a sua direção. A direção para cada ponto sobre os pontos de roda ao longo do tangente à sua órbita circular. Por exemplo, no ponto A o vector velocidade v_A é perpendicular à linha pontilhada que conecta ponto A com o ponto B. A velocidade de cada ponto é dada por $v = \omega r$. Aqui r é a distância entre um particular ponto e o ponto de contato P. Por exemplo, no ponto T $r=2R$. Assim $v_T = 2R\,\omega$. Para o ponto O $r=R$ Assim $v_O = R\omega = v_{CM}$. Para o ponto P $r=0$, assim $v_P = 0$



Rotation axis at P

A energia cinética de rolamento

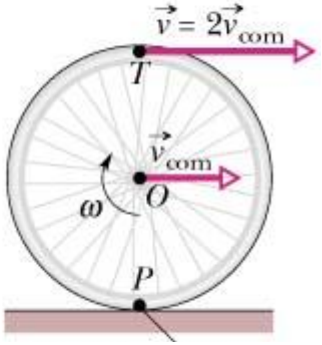
Considere o objeto de rolamento mostrado na figura ao lado. É mais fácil para calcular a energia cinética de rolamento do corpo, considerando o movimento como rolamento puro sobre o ponto de contato P. O objeto tem massa de rolamento M e raio R.

A energia cinética K é dada pela equação: $K=1/2\ I_P\ \omega^2$. Aqui I_P é o inércia de rotação (ou momento de inercia) do corpo em rolamento em torno do ponto P. Podemos determinar I_P utilização o teorema do eixo paralelo: $I_P = I_{com} + MR^2 \rightarrow K = \frac{1}{2}\left(I_{com} + MR^2\right)\omega^2$

$$K = \frac{1}{2}\left(I_{com} + MR^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2}I_{com}\omega^2 + \frac{1}{2}MR^2\omega^2$$

$$\boxed{K = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2}$$

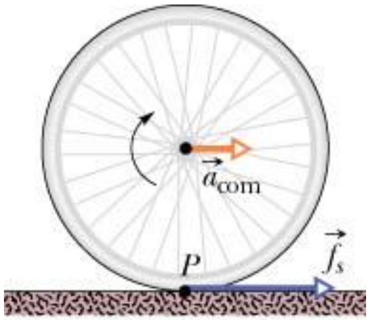
A expressão para a energia cinética é constituído por dois termos. O primeiro termo corresponde à rotação em torno do centro de massa O com velocidade angular ω. O segundo termo está associado com a energia cinética devido à translação do ponto com velocidade v_{CM}



$\vec{a}_{com} = 0$

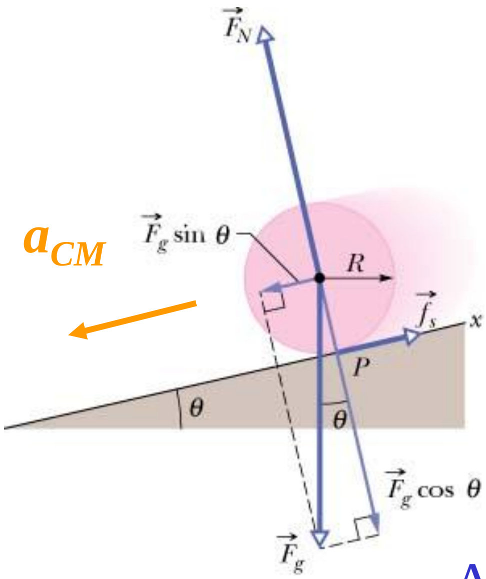
Atrito e Rolamento

Quando um objeto rola com velocidade constante (ver figura ao lado) ele não tem tendência para deslizar no ponto P contato e, portanto, nenhuma força de atrito atua lá. Se uma força líquida atua sobre o corpo circulante resulta em uma aceleração não-nula a_{CM} para o centro de massa (ver figura inferior). Se o rolamento objeto acelera para a direita, tem a tendência para deslizar no ponto P para a esquerda. Assim, uma força de atrito estático f_s opõe-se à tendência a deslizar para o lodo. O movimento é um suave rolamento se $f_s = f_{s,max}$



A condição de rolamento que resulta em uma conexão entre a magnitude do aceleração do centro de massa a_{CM} e da sua aceleração angular α. $v_{CM} = \omega R$. Tomamos a derivada de tempo de ambos os lados temos:

$$\boxed{a_{CM} = R\alpha}$$



Rolando uma rampa

(11-7)

Considere um corpo redondo uniforme de massa Me raio R rolando um plano inclinado de ângulo θ. Iremos calcular a aceleração a do centro de massa ao longo do eixo-x usando a segunda lei de Newton para o movimento de translação e rotação

A segunda lei de Newton para o movimento ao longo do eixo-x: $f_s - Mg\sin\theta = Ma_{CM}$ (eqs.1)

A segunda lei de Newton para rotação em torno do centro de massa

$$\tau = Rf_s = I_{CM}\alpha \longrightarrow \alpha = -\frac{a_{CM}}{R}$$

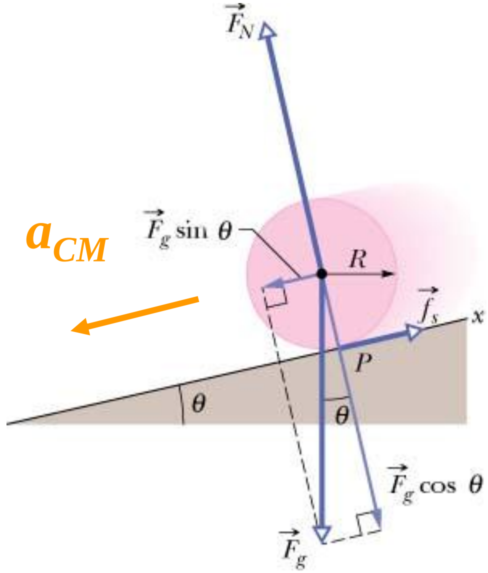
Nós substituímos α nesta equação:

$$Rf_s = -I_{CM}\frac{a_{CM}}{R} \longrightarrow f_s = -I_{CM}\frac{a_{CM}}{R^2} \quad \text{(eqs.2)}$$

Se nós substituímos f_s da equação 2 na equação 1 temos:

$$\boxed{a_{CM} = -\frac{g\sin\theta}{1 + \dfrac{I_{CM}}{MR^2}}}$$

(11-8)



$$\boxed{|a_{CM}| = \frac{g\sin\theta}{1+\dfrac{I_{CM}}{MR^2}}}$$

Cilindro

$$I_1 = \frac{MR^2}{2}$$

$$a_1 = \frac{g\sin\theta}{1+I_1/MR^2}$$

$$a_1 = \frac{g\sin\theta}{1+MR^2/2MR^2}$$

$$a_1 = \frac{g\sin\theta}{1+1/2}$$

$$a_1 = \frac{2g\sin\theta}{3} = (0.67)g\sin\theta$$

Argola

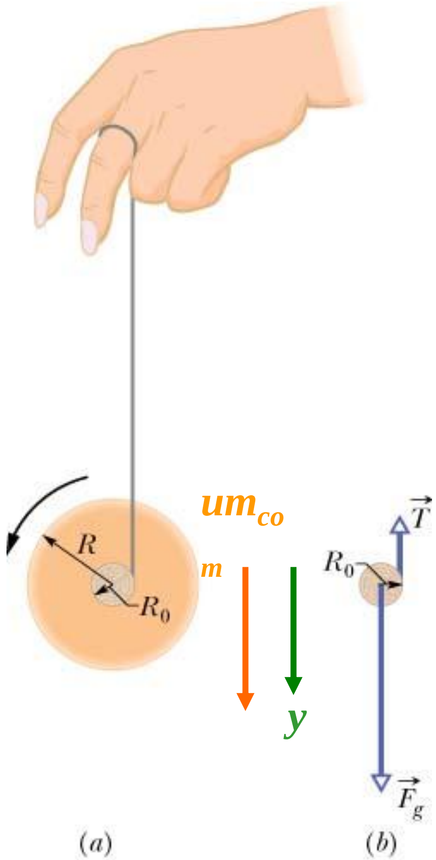
$$I_2 = MR^2$$

$$a_2 = \frac{g\sin\theta}{1+I_2/MR^2}$$

$$a_2 = \frac{g\sin\theta}{1+MR^2/MR^2}$$

$$a_2 = \frac{g\sin\theta}{1+1}$$

$$a_2 = \frac{g\sin\theta}{2} = (0.5)g\sin\theta$$



Io-Io

Considere um io-io de massa M, Raio R, Raio e eixo R_o rolando um fio. Vamos calcular a aceleração a_{CM} do centro da sua massa ao longo do eixo-y usando a segunda lei Newton para o movimento de rotação e translação como fizemos no problema anterior.

A segunda lei de Newton para o movimento ao longo do eixo-y:

$$Mg - T = Ma_{CM} \quad \text{(eqs.1)}$$

A segunda lei de Newton para rotação em torno do centro de massa

$$\tau = R_o T = I_{CM}\alpha. \quad \text{(eqs 2)}$$

A aceleração angular é dada por: $\alpha = \dfrac{a_{CM}}{R_o}$

Se nós substituímos α na equação 2 podemos obter:

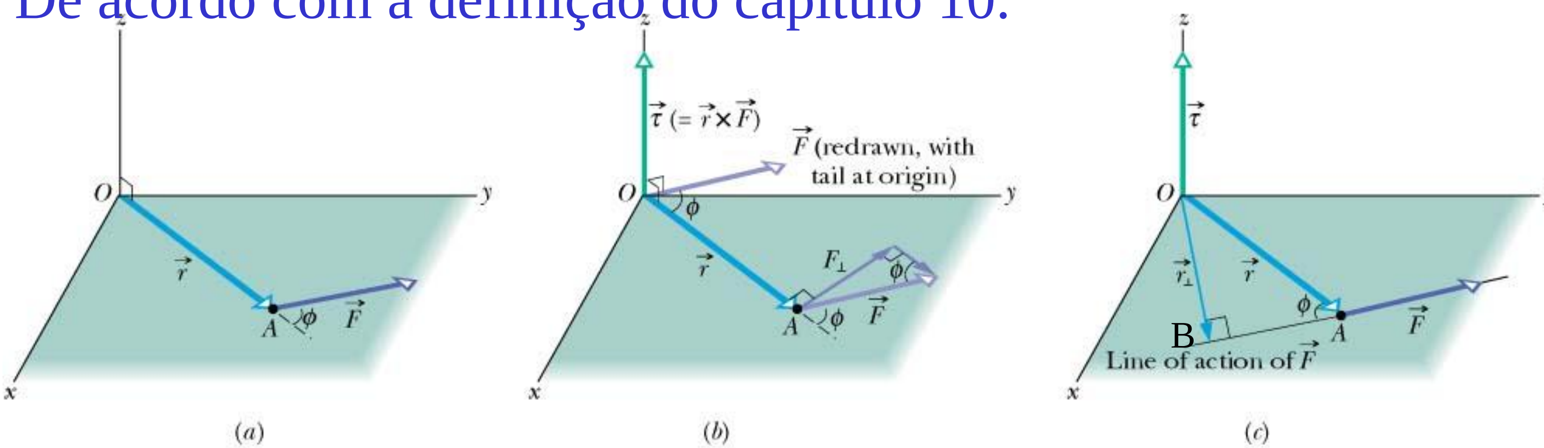
$$T = I_{CM}\frac{a_{CM}}{R_o^{\,2}} \quad \text{(eqs.2)} \quad \rightarrow Mg - I_{CM}\frac{a_{CM}}{R_o^{\,2}} = Ma_{CM} \quad \rightarrow \quad a_{CM} = \frac{g}{1+\dfrac{I_{CM}}{MR_o^{\,2}}}$$

Torque (revisitado)

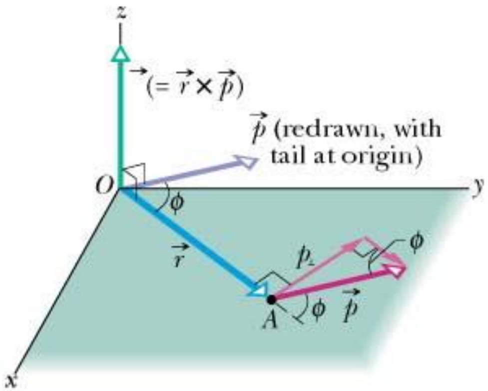
No capítulo 10, definimos o torque τ de um corpo rígido rotação em torno de um eixo fixo com cada partícula no corpo em movimento numa trajetória circular. Nós agora vamos expandir o definição de torque de modo que ele pode descrever o movimento de uma partícula do que se move ao longo de qualquer caminho em relação a um ponto fixo. Se **r** é o vetor posição de uma partícula em que uma força F está atuando, o torque τ é definida como: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

No exemplo mostrado na figura tanto r e F encontram-se no Plano x-y. Usando a regra da mão direita, podemos ver que a direção do τ é ao longo do eixo z. A magnitude do vector torque τ=rFsen(θ), Onde θ é o ângulo entre r e F. Do triângulo OAB temos: $r\sin\phi = r_{\perp} \rightarrow \quad \tau = r_{\perp}F$

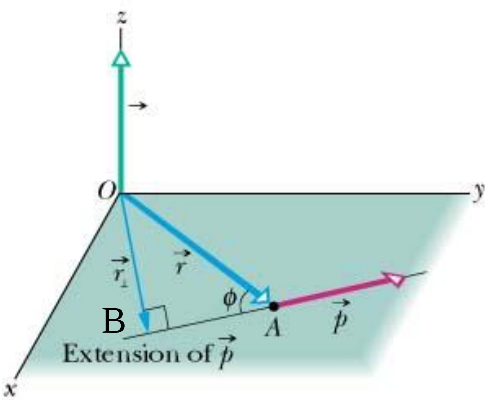
De acordo com a definição do capítulo 10.



(11-10)



(a)



(b)

Momento Angular

A contrapartida do momento linear p=mv em rotação é um novo vetor conhecido como momentum angular. O novo vector é definido como se segue: $\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}$

No exemplo mostrado na figura ao lado tanto r e p encontram-se no plano xy. Usando a regra da mão direita, pode ver que a direção é ao longo do eixo z. A magnitude do momento angular é dado por: $\ell r m v \sin\phi$, onde ϕ é o ângulo entre r e p.

Do triângulo OAB temos: $r\sin\phi = r_{\perp} \rightarrow \ell = r_{\perp}\text{mv}$

Nota: O momento angular depende da escolha da origem O. Se a origem é deslocado, em geral, obtemos um valor diferente de $\vec{\ell}$

A unidade SI para o momento angular: kg.m^2/s ou J.s.

$$\boxed{\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = m\left(\vec{r} \times \vec{v}\right)} \qquad \boxed{\ell = r_{\perp}\text{mv}}$$

(11-11)

Segunda Lei de Newton na forma angular

Segunda lei de Newton para o movimento linear tem a forma: $\vec{F}_{net} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$.

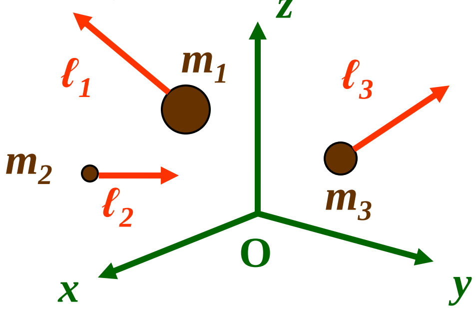
Abaixo vamos derivar a forma angular da segunda lei de Newton para uma partícula.

$$m\left(\vec{r}\times\vec{v}\right) \to \frac{d\vec{\ell}}{dt} = m\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times\vec{v}\right) = m\left(\vec{r}\times\frac{d\vec{v}}{dt}+\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{v}\right) = m\left(\vec{r}\times\vec{a}+\vec{v}\times\vec{v}\right)$$

$$\vec{v}\times\vec{v} = 0 \to \frac{d\vec{\ell}}{dt} = m\left(\vec{r}\times\vec{a}\right) = \left(\vec{r}\times m\vec{a}\right) = \left(\vec{r}\times\vec{F}_{net}\right) = \vec{\tau}_{liquido}$$

Assim $\vec{\tau}_{liquido} = \dfrac{d\vec{\ell}}{dt}$ Compare with: $\vec{F}_{liquido} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$

$$\boxed{\vec{\tau}_{liquido} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}}$$



O Momento Angular de um Sistema de Partículas

Vamos agora explorar segunda lei de Newton em forma angular para um sistema de n partículas que têm momentum angular $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3, \ldots, \vec{\ell}_n$

O momento angular $\vec{L}$ do sistema é $\vec{L} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \vec{\ell}_3 + \ldots + \vec{\ell}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{\ell}_i$

A derivada temporal do momento angular é : $\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{\ell}_i}{dt}$

A derivada no tempo para o momento angular da i-ésimo partícula é: $\frac{d\vec{\ell}_i}{dt} = \vec{\tau}_{liquido,i}$

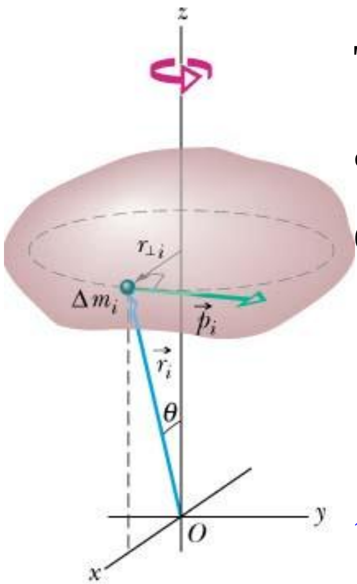
Onde $\vec{\tau}_{liquido,i}$ é o torque líquido sobre a partícula Este torque tem contribuições a partir de forças externas, bem como forças internas entre as partículas do sistema. Assim

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_{liquido,i} = \vec{\tau}_{liquido}$ Onde $\vec{\tau}_{liquido}$ é o torque líquido devido a todas as forças externas.

Em virtude da terceira lei de Newton a soma vetorial de todos os torques internos é zero..

Assim segunda lei de Newton para um sistema em forma angular assume a forma: $\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{net}}$

Momento Angular de um corpo rígido girando sobre um eixo fixo



(a)

Tomamos o eixo z para ser o eixo de rotacao fixo. Nos ira determinar a componente z do momento angular net. O corpo e divididas n elementos de massa Δm_i que tem um vector de posicao $\vec{r}_i$

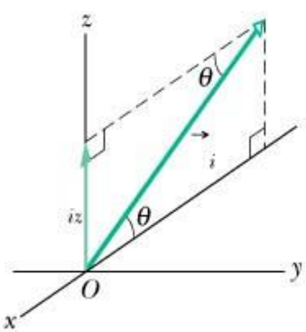
O momento angular $\vec{\ell}_i$ do i-ésimo elemento é: $\vec{\ell}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$

Sua magnitude $\ell_i = r_i p_i \left(\sin 90°\right) = r_i \Delta m_i v_i$ A compomente z é

ℓ_{iz} of ℓ_i is: $\ell_{iz} = \ell_i \sin\theta = \left(r_i \sin\theta\right)\left(\Delta m_i v_i\right) = r_{\perp i}\Delta m_i v_i$

O componente z do momento angular L_z é a soma:

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} \ell_{iz} = \sum_{i=1}^{n} r_{\perp i}\Delta m_i v_i = \sum_{i=1}^{n} r_{\perp i}\Delta m_i \left(\omega r_{i\perp}\right) = \omega\left(\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i r_{i\perp}^2\right)$$



(b)

A soma $\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i r_{i\perp}^2$ momento de inércia I do corpo rígido

Assim: $L_z = I\omega$

$$\boxed{L_z = I\omega} \qquad (11\text{-}14)$$

(11-15)

Conservação do momento angular

Para qualquer sistema de partículas (incluindo um corpo rígido)

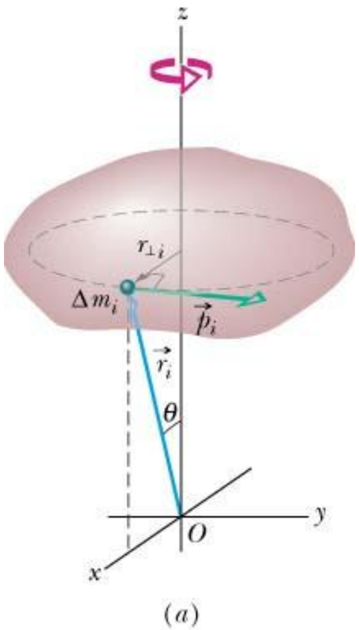
a segunda lei Newton na forma angular é: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{liquido}$

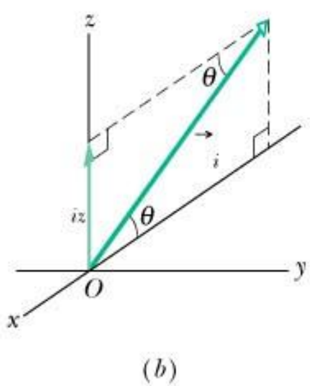
Se o torque externo líquido *é* $\vec{\tau}_{liquido} = 0$ então temos : $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \rightarrow$

$\vec{L} =$ constante é conhecida como a lei do conservação do momento angular: Em palavras

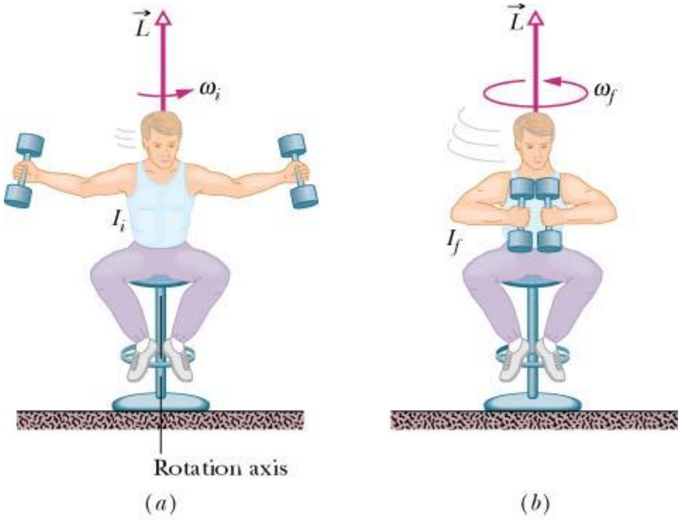
$$\begin{pmatrix} \text{Momentum angular líquido} \\ \text{num tempo inicial } t_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Momentum angular líquido} \\ \text{num tempo qualquer } t_f \end{pmatrix}$$

Na forma de equação: $\boxed{\vec{L}_i = \vec{L}_f}$





Nota: Se o componente do binário externa ao longo de uma certa eixo é igual a zero, então o componete do momento angular do sistema ao longo deste eixo não pode alterar



Exemplo: A figura mostra um estudante sentado em um banquinho que pode girar livremente sobre uma eixo vertical. O aluno gira a uma velocidade de rotação angular inicial ω_i, detém dois halteres em suas mãos estendidas. Seu vector momento angular L fica ao longo da eixo de rotação, apontando para cima.

O estudante, então, puxa em suas mãos, como mostrado na fig.b. Esta acção reduz a inércia de rotação a partir de um valor inicial I_i para um menor valor final I_f.

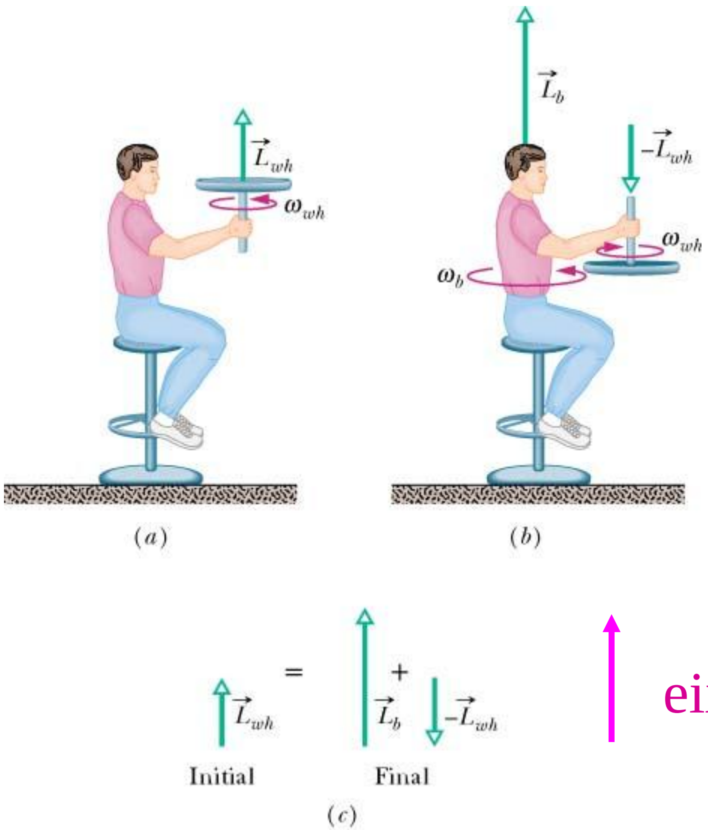
Nenhum torque externo líquido age sobre o sistema. Assim, o momento angular do sistema mantém-se inalterado.

O momento angular em t_i: $L_i = I_i \omega_i$ O momento angular em t_f: $L_f = I_f \omega_f$

$$L_i = L_f \rightarrow I_i \omega_i = I_f \omega_f \rightarrow \omega_f = \frac{I_i}{I_f}\omega_i$$

Desde $I_f < I_i \rightarrow \frac{I_i}{I_f} > 1 \rightarrow \omega_f > \omega_i$

A taxa de rotação do aluno na figura b é mais rápida



Problema Exemplo 11-7:

$$I_{wh} = 1.2 \text{ kg.m}^2$$

$$\omega_{wh} = 2\pi \times 3.9 \text{ rad/s}$$

$$I_b = 6.8 \text{ rad/s}$$

$$\omega_b = ?$$

eixo dos y

$$L_i = L_f \rightarrow L_{wh} = -L_{wh} + L_b \rightarrow L_b = 2L_{wh}$$

$$I_b\omega_b = 2I_{wh}\omega_{wh} \rightarrow \omega_b = \frac{2I_{wh}\omega_{wh}}{I_b} = \frac{2\times 1.2\times 2\pi\times 3.9}{6.8} = 2\pi\times 1.4 \text{ rad/s}$$

Analogias entre o movimento de translação e rotação

Movimento de translação - Movimento de rotação

$$x \leftrightarrow \theta$$

$$v \leftrightarrow \omega$$

$$a \leftrightarrow \alpha$$

$$p \leftrightarrow \ell$$

$$K = \frac{mv^2}{2} \leftrightarrow K = \frac{I\omega^2}{2}$$

$$m \leftrightarrow I$$

$$F = ma \leftrightarrow \tau = I\alpha$$

$$F \leftrightarrow \tau$$

$$P = Fv \leftrightarrow P = \tau\omega$$

$$\vec{F}_{net} = \frac{d\vec{p}}{dt} \leftrightarrow \vec{\tau}_{net} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}$$

$$p = mv \leftrightarrow L = I\omega$$