Capítulo 15
Oscilações

Neste capítulo vamos abordar os seguintes tópicos:

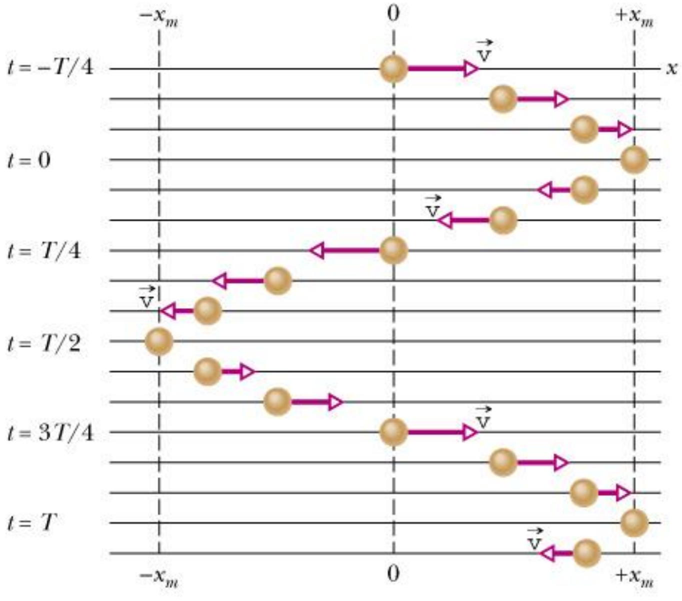
Velocidade de deslocamento e aceleração de um oscilador harmônico simples

Energia de um oscilador harmônico simples

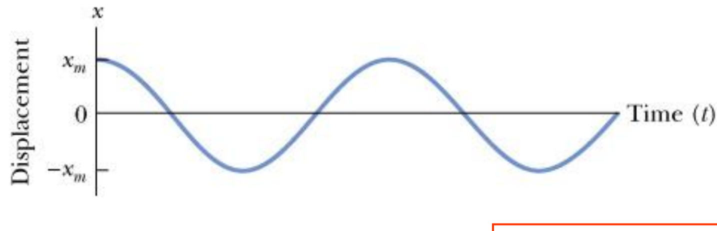
Exemplos de osciladores harmônicos simples: sistema mola-massa, pêndulo simples, pêndulo físico, pêndulo de torção

Oscilador harmônico amortecido

Oscilações forçadas / Ressonância



(a)



(b)

(15-2)

$$\boxed{x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)}$$

Movimento Harmônico Simples (MHS)
Na fig a mostramos instantâneos de um sistemas oscilante simples.

O movimento é periódico ou seja, ela se repete no tempo. O tempo necessário para completar uma repetição é conhecido como o período (Símbolo T, unidade: S). O número de repetições por unidade de tempo é chamado o frequencia (Símbolo f, A unidade de hertz) $f = \dfrac{1}{T}$

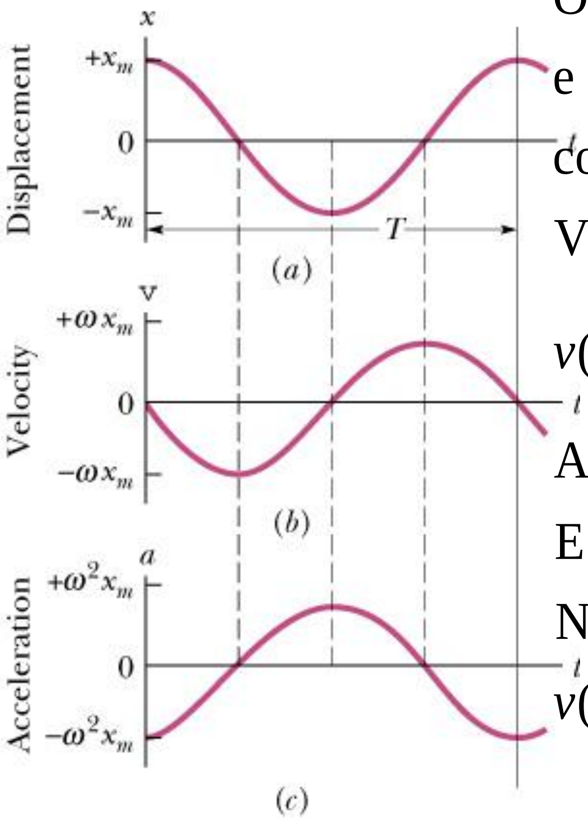
O deslocamento da partícula é dada pela equação: $x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$

Na Fig.b é graficado $x(t)$ versus t. A quantidade x_m é chamada de amplitude do movimento. Dai o deslocamento máximo possível de um objecto oscilante é x_m.

A quantidade ω é chamada frequencia angular do oscilador. E dada pela a equação:

$$\boxed{\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}}$$

$$\boxed{x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)}$$



A quantidade ϕ é chamado o angulo de fase do oscilador.

O valor ϕ é determinado a partir do deslocamento x(0)

e a velocidade v(0) em t=0. Na fig ao lado x(t) é tracada

contra t para $\phi = 0$. $x(t) = x_m \cos \omega t$

Velocidade do deslocament no MHS

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[x_m \cos(\omega t + \phi)\right] = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi)$$

A quantidade ωx_m é chamada amplitude de velocidade v_m

E expressa o valor máximo possível de $v(t)$

Na fig.b a velocidade $v(t)$ é graficada em temos de t para $\phi = 0$.

$v(t) = -\omega x_m \sin \omega t$

A aceleração no MHS: $a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[-\omega x_m \sin(\omega t + \phi)\right] = -\omega^2 x_m \cos \omega t = -\omega^2 x$

A quantidade $\omega^2 x_m$ é chamado amplitude de aceleração a_m. Ela expressa o máximo *de* a(t).

Na fig.c the aceleração a(t) é graficada em termos de t para $\phi = 0$.

$a(t) = -\omega^2 x_m \cos \omega t$

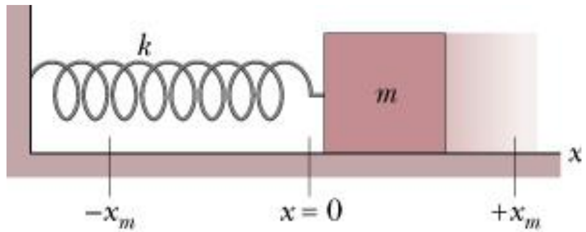
A lei da força para um movimento harmônico simples

Vimos que a aceleração de um objeto passando MHS é: $a = -\omega^2 x$

Se aplicarmos a segunda lei de Newton, temos: $F = ma = -m\omega^2 x = -\left(m\omega^2\right)x$

O movimento harmônico simples MHS ocorre quando a força que age sobre um objeto é paroportional ao deslocamento mas de sinal oposto. A força pode ser escrita como: $F = -Cx$ onde C é uma a constante. Se compararmos as duas expressões para F temos:

$m\omega^2 = C \rightarrow$ e $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{C}}}$



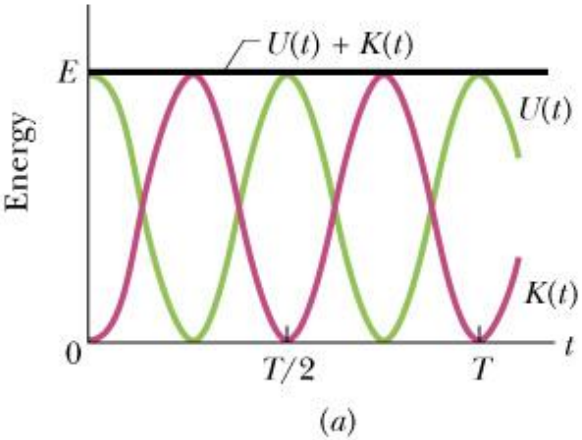
Considere o movimento de uma massa m ligado a uma mola de constante de mola k que se move em um atrito no chão horizontal, como mostrado na figura ao lado.

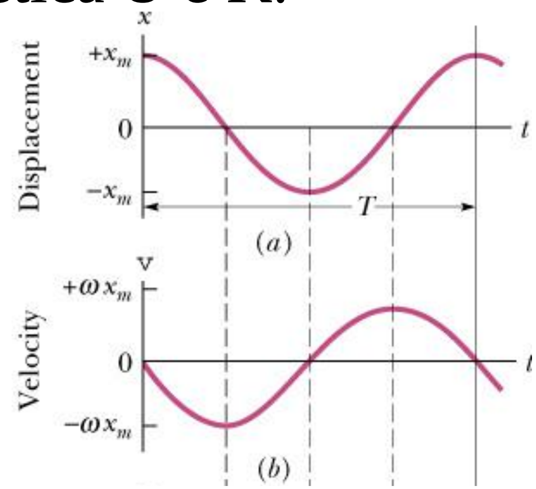
A força líquida F em m é dada pela lei de Hooke: $F = -kx$. Se compararmos esta equa com a expressao F=-Cx identificamos a constante C com k constante de mola.

Podemos entao calcular a frequencia angular ω para o periodo T.

$\omega = \sqrt{\frac{C}{m}} = \sqrt{\frac{k}{m}}$ and $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{C}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$

Energia em movimento harmônico simples A energia mecânica Ede um MHS é a soma de suas energias potencial e cinética U e K.



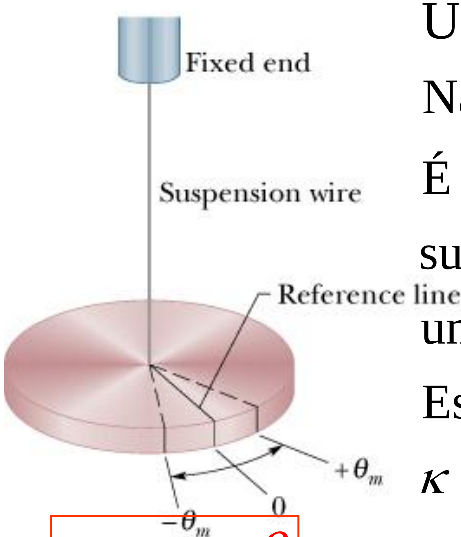


Energia potencial $U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_m^2 \cos^2(\omega t + \phi)$

Energia cinética $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x_m^2 \sin^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2}m\frac{k}{m}x_m^2 \sin^2(\omega t + \phi)$

A energia mecânica $E = U + K = \frac{1}{2}kx_m^2\left[\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi)\right] = \frac{1}{2}kx_m^2$ (15-5)

Na figura nos plotamos a energia potencial U (linha verde), a energia cinética K (linha vermelha) e a energia mecânica ou total E (linha preta) versus tempo t. Enquanto U e K variam com o tempo, a energia total E é uma constante. A energia do objetos oscilantes converte entre só a energia potencial e cinética, enquanto a soma a duas permanece constante.



$\boxed{\tau = -\kappa\theta}$

Um oscilador harmônico angular simples (pêndulo de torção)

Na figura mostram um outro tipo de sistema oscilante

É constituída por um disco com um momento de inércia I suspensa a partir de um fio que torce como m gira em um angulo θ. O fio exerce no disco um torque de restauracao $\tau = -\kappa\theta$ Esta e a forma angular da lei de Hooke. A constante κ é chamada de constante de torção do fio.

Se compararmos a expressão $\tau = -\kappa\theta$ para o torque com a equação da força $F = -Cx$ percebemos que a constante C com a constante de torção κ.

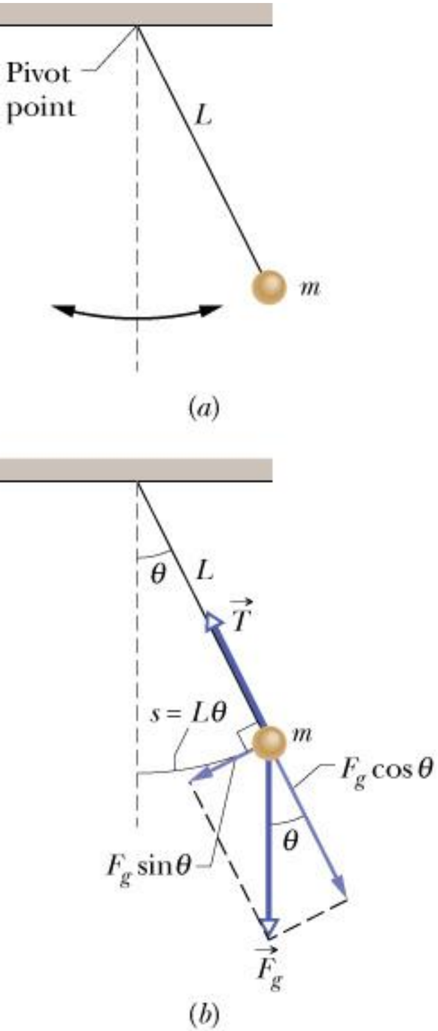
Podemos assim determinar prontamente a frequência angula ω e o periodo T.

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{I}} = \sqrt{\frac{\kappa}{I}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}$$

Note-se que I é a inercia de rotação do disco sobre um eixo que coincide com o fio. O angulo θ é dado pela equacao:

$$\boxed{\theta(t) = \theta_m \cos(\omega t + \phi)} \quad (15\text{-}6)$$

O Pêndulo Simples



Um pêndulo simples consiste de uma partícula de massa m suspenso por uma corda de comprimento L a partir de um ponto de articulação. Se a massa é perturbado da sua posição de equilíbrio, a força resultante atuando em m é tal que o sistema executa um MHS.

Existem duas forças que atuam sobre m: A força gravitacional e a tensão da corda. O torque líquido destas forças é:

$\tau = -r_{\perp} F_g = -Lmg \sin\theta$ Onde θ é o ângulo que o segmento faz com a vertical. Se $\theta \ll 1$ (menor que 5 °) Então podemos fazer a seguinte aproximação: $\sin\theta \approx \theta$ onde θ é expresso em radianos. Com esta aproximação o torque τ é:

$\tau \approx -(Lmg)\theta$ Se compararmos a expressão para τ com a equação da força $F = -Cx$ percebemos que a constante C como sendo igual a Lmg. Podemos, assim, determinar prontamente a frequência angular ω e o período T de oscilação. $\omega = \sqrt{\frac{C}{I}} = \sqrt{\frac{mgL}{I}}$; $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}}$

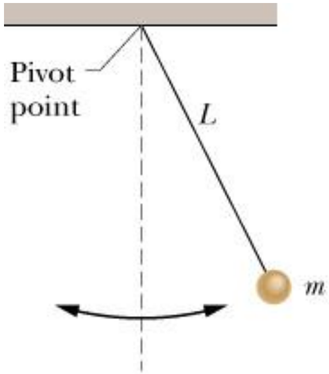
(15-7)

Numa **aproximação para pequeno ângulos** assumimos que $\theta << 1$ e usou a aproximação: o sen $\theta \cong \theta$ Estamos agora decidindo o que é um angulo “**pequeno**" ou seja, até ponto o ângulo θ é a aproximação razoavelmente precisa?

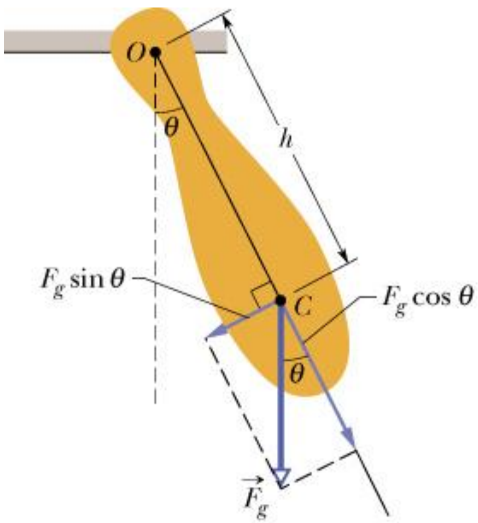
θ (degrees)	**θ(radians)**	**sinθ**
5	0.087	0.087
10	0.174	0.174
15	0.262	0.259 (1% erro)
20	0.349	0.342 (2% erro)

Conclusão: Se continuarmos $\theta < 10°$ fazemos menos que o erro de 1%

(15-8)



$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$



$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}}$$

O momento de inércia I em torno de um pivô é igual para mL^2

Assim $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}} = 2\pi\sqrt{\frac{mL^2}{mgL}}$

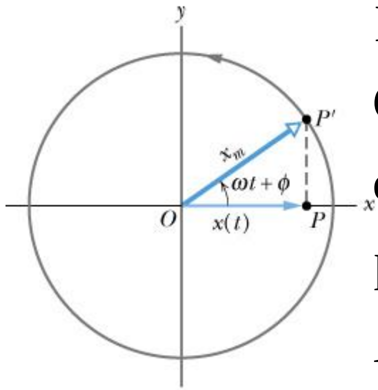
Pêndulo físico

Um pêndulo físico é um órgão extened rígida que está suspensa a partir de um ponto fixo ó e oscila sob a influência da gravidade O torque líquido $\tau = -mgh\sin\theta$ Aqui he a distancia entre ponto O e do centro de massa C do corpo suspenso.

Se fizermos a aproximacao pequeno angulo $\theta \ll 1$, temos: $\tau \approx -(mgh)\theta$. Se compararmos os torques com o equação da força $F = -Cx$ percebemos que nós identificamos a constante C com o termo mgh. Podemos, portanto, facilmente determinar o período T de oscilação.

$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}$ Aquí I é o momento de inércia com relação ao eixo O. $I = I_{com} + mh^2$

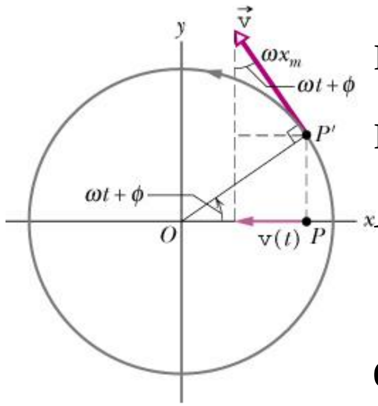
Movimento harmonico simples e movimento circular uniforme



(a)

Considere um objeto em movimento numa trajetoria circular de raio x_m com uma velocidade uniforme v. Se projetar a posição da particula que se move no ponto P` no eixo x temos ponto P.

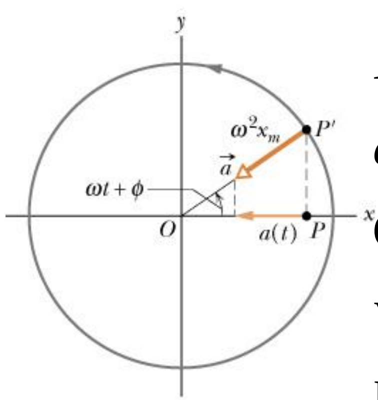
A coordenada de P' e: $x(t) = x_m \cos\left(\omega t + \phi\right)$.



(b)

Enquanto o ponto P' executa um movimento circular sua movimentos de projecao P' ao longo do eixo x com simples movimento harmonico.

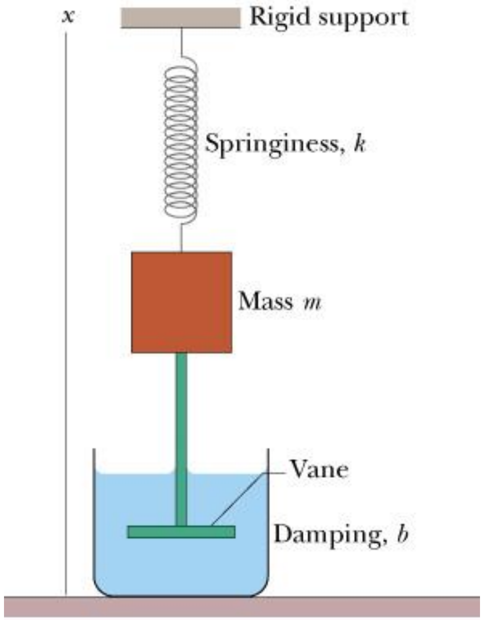
A velocidade v do ponto P' é igual a ωx_m. A direção vetor velocidade aponta ao longo da tangente do caminho circular. Se projetarmos a velocidade v no eixo x temos: $v(t) = -\omega x_m \sin\left(\omega t + \phi\right)$



(c)

A aceleração $\vec{a}$ aponta para o centro O. Se projetarmos $\vec{a}$ ao longo do eixo x nos temos: $a(t) = -\omega^2 x_m \cos\left(\omega t + \phi\right)$

Conclusão: Se olharmos para o deslocamento, a velocidade ou a aceleração, a projeção de uniforme movimento circular com o diâmetro do eixo x é MHS



Movimento harmônico amortecido simples
Quando a amplitude de um objeto oscilante é reduzida devido à presença de uma força externa, o movimento é dito ser amortecido. Um exemplo é dado na figura ao lado. A massa m presa a uma mola de constante k oscila verticalmente. A massa oscilante está ligado a uma pá submersa num líquido. O líquido exerce uma força amortecedora F_d cuja magnitude é dada pela equação: F_d=-bv

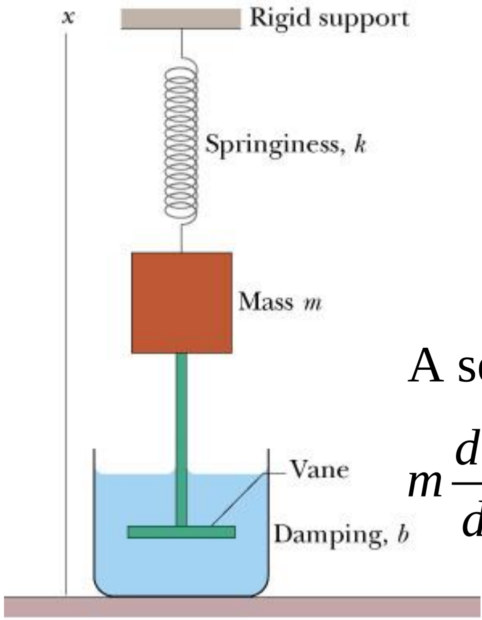
O sinal negativo indica que $\vec{F}_d$ se opõe ao movimento da massa oscilante.

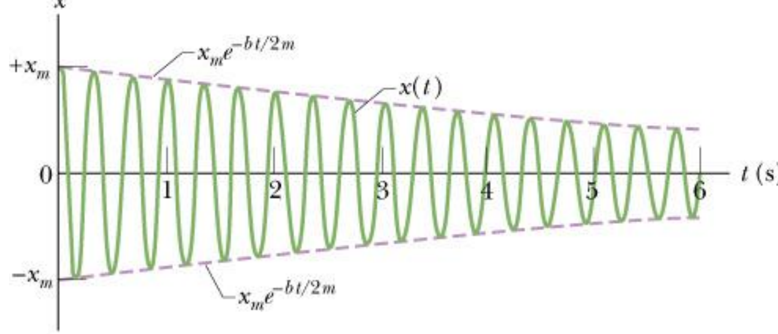
O parmeter b é chamada constante de amortecimento. A força resultante sobre m é:

$F_{res} = -kx - bv$ De segunda lei de Newton, temos:

$-kx - bv = ma$ Nós substituímos v por $\frac{dx}{dt}$ e a por $\frac{d^2x}{dt^2}$ e, assim, temos

a seguinte equação diferencial: $m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$ (15-11)





(15-12)

A segunda lei de Newton para o oscilador harmônico amortecido:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$ solução tem a forma:

$$\boxed{x(t) = x_m e^{-bt/2m}\cos\left(\omega' t + \phi\right)}$$

Na foto acima, graficamos x(t) versus t. Podemos considerar a solução acima como uma função de coseno com uma amplitude -dependente do tempo $x_m e^{-bt/2m}$.

A frequencia angular ω' do oscilador amortecido harmonica e dada pela equacao:

$$\omega' = \sqrt{\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

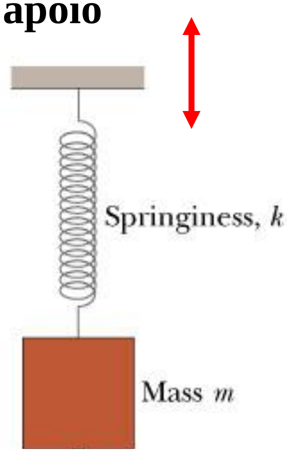
Para um oscilador harmônico sem amortecimento da energia $E = \frac{1}{2}kx_m^2$

Se o oscilador é amortecido a sua energia não é constante, mas diminui com o tempo.

Se o amortecimento é pequeno que pode substituir x_m com $x_m e^{-bt/2m}$ Ao fazê-lo, descobrimos que:

$$E(t) \approx \frac{1}{2}kx_m^2 e^{-bt/m}$$ A energia mecânica diminui exponencialmente com o tempo.

Movendo apoio



Oscilacoes Forcadas e Ressonância

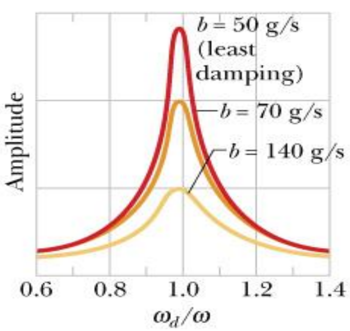
Se um sistema oscilante é perturbada e depois deixado a oscilar livremente a frequencia angular correspondente ω é chamado de frequencia natural de oscilação. O mesmo sistema pode também pode ser conduzido como mostrado na figura acima por um suporte movel que oscila em uma frequencia arbitraria angular ω_d.

Tal suporte força o sistema a oscila oscilador na frequência angular ω_d acionado por força motriz. O deslocamento é dada por:

$x(t) = x_m \cos\left(\omega' t + \phi\right)$ amplitude de oscilação xm varia com o frequancy condução, como mostrado na figura inferior.

A amplitude é maior quando approximatetly $\omega_d = \omega$

Esta condição é chamada ressonância. Todas as estruturas mecânicas tem uma ou mais frequências naturais e se esta estrutura é submetido a uma força motriz externa forte, cuja frequência corresponde a uma das freqüências naturais, as oscilações resultantes pode danificar a estrutura.



(15-13)