Capítulo 16 - Ondas I

Neste capítulo iniciaremos a discussão sobre fenômenos ondulatórios. Vamos estudar os seguintes tópicos:

Tipos de ondas.

Amplitude, fase, frequência, período e velocidade de propagação.

Uma onda mecânicas que se propagam ao longo de uma corda esticada;

Equação da Onda;

Principio de superposição de ondas;

Interferência de ondas;

Ondas estacionárias, ressonância;

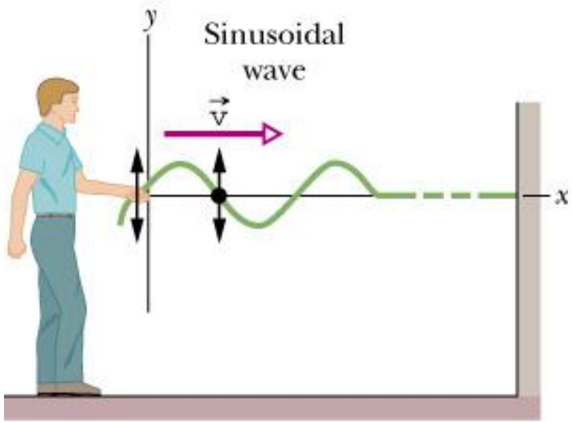
A **onda** é definida como um distúrbio que é auto-sustentado e que se propaga no espaço com uma velocidade constante

Ondas podem ser classificados em três categorias:

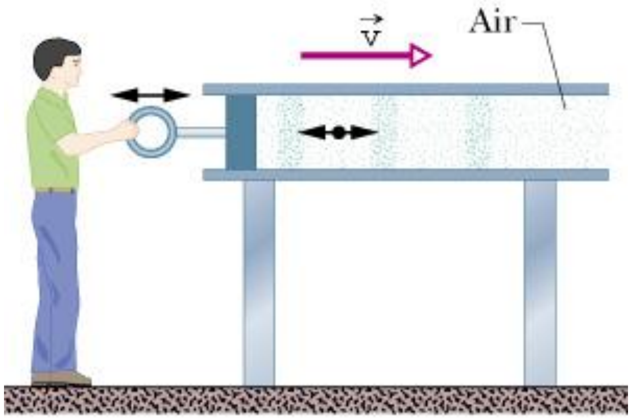
1. Ondas mecânicas. Estes envolvem movimentos que são regidos por leis de Newton e só pode existir dentro de um suporte material, tais como ar, água, pedra, etc Exemplos comuns são: ondas sonoras, ondas sísmicas, etc

2. Ondas eletromagnéticas. Essas ondas envolvem distúrbios que se propagam no campo elétrico e magnético e é regido pelas equações de Maxwell. Elas não necessitam de um suporte material para se propagar e viajam através de vácuo. Exemplos comuns são: ondas de rádio de todos os tipos, visíveis, infra-vermelhos e ultra-violeta, raios-x, gama. Todas as ondas electromagnéticas propagam no vácuo com a mesma velocidade c = 300.000 km / s

3. Onda material. Envolvem partículas microscópicas, como elétrons, prótons, nêutrons, átomos etc e que têm uma onda associada a eles regidos pela equação de Schroedinger.



(b)



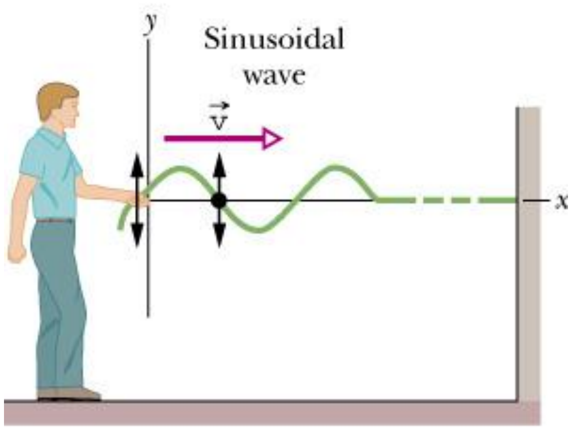
Ondas transversais e longitudinais

Ondas podem ser divididas em duas categorias, dependendo da orientação da perturbação com respeito à velocidade de propagação da onda v.

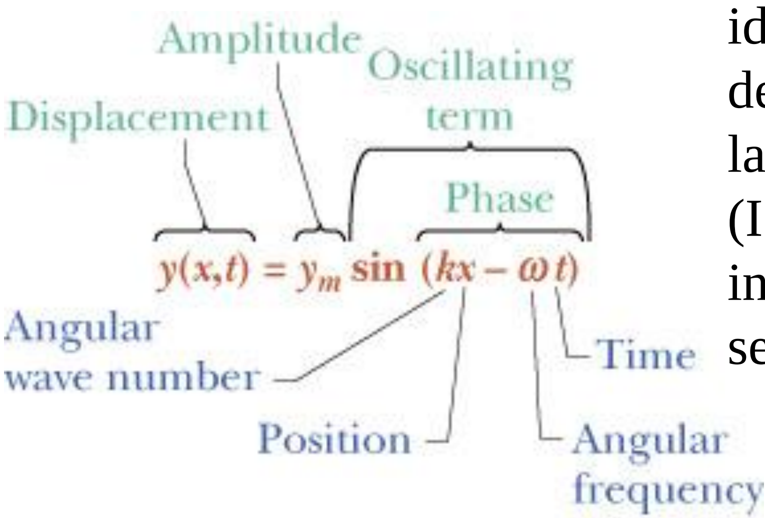
Se a perturbação associada a uma onda particular é perpendicular à velocidade de propagação da onda,. Esta onda é chamada de "transversal". Um exemplo é dado na figura superior que ilustra uma onda mecânica que se propaga ao longo de uma corda. O movimento de cada partícula na corda é ao longo do eixo y; a própria onda se propaga ao longo do eixo x.

Se a perturbação associada a onda é paralela à propagação, a onda é conhecido como um "onda longitudinal". Um exemplo de uma tal onda é dada na figura inferior. É produzida por um êmbolo oscilante em um tubo cheio de ar. A onda resultante envolve o movimento das moléculas de ar ao longo do eixo do tubo, que é também o sentido da velocidade de propagação da onda v.

(16 - 4)

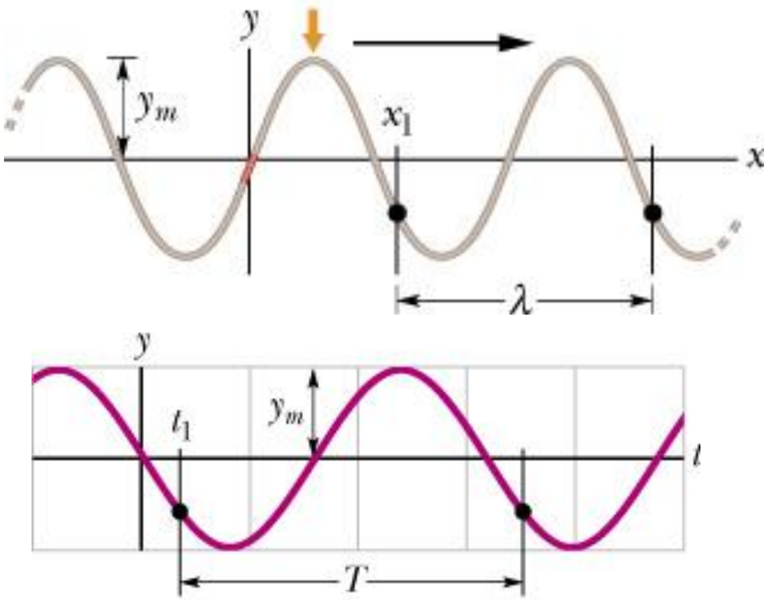


(b)



Considere uma onda transversal que se propaga ao longo de um corda, como mostrado na figura ao lado. A posição de um ponto qualquer sobre a corda pode ser descrito por uma função y=h(x,t). Mais adiante, veremos que a função h tem uma forma específica para descrever uma onda. Uma vez que adequado, tal função é: $y(x,t)=y_m \sin(kx - \omega t)$ Tal onda é descrita por uma função seno (ou um co-seno) é conhecida como "onda harmônica". Os vários termos que aparecem na expressão para a onda harmónica são identificado na figura ao lado. A função y(x,t) depende x e t. Existem duas formas de visualizá-la. A primeira é a de "congelamento" do tempo (Isto é, conjunto t_0). Isto é como tomar um instantâneo da onda em t = t_0 ou $y(x, t_0)$. O segundo é definir x=xo . Neste caso $y(x_0, t)$.

(16-5)



$y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t)$

A amplitude y_m é o valor absoluto do deslocamento máximo a partir da posição equilíbrio.

A fase é definida como o argumento $(kx - \omega t)$ da funcao de seno.

O comprimento de onda λ é a distância mais curta entre duas repetições de uma onda num tempo fixo.

Nos fixamos t em $t = 0$. Nós temos a condição: $y(x_1, 0) = y(x_1 + \lambda, 0) \rightarrow$

$$y_m \sin(kx_1) = y_m \sin\left[k(x_1 + \lambda)\right] = y_m \sin(kx_1 + k\lambda)$$

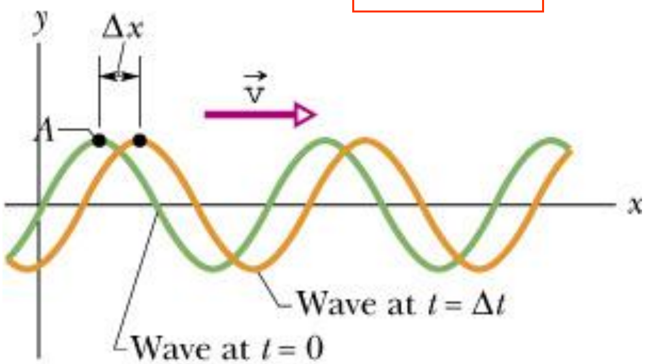
Desde que a função seno tem um período $2\pi \rightarrow k\lambda = 2\pi \rightarrow k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

O **periodo** T é o tempo (fixo em x) da função seno completar uma oscilação. Nor tomamos $x = 0 \rightarrow y(0,t) = y(0,t+T) \rightarrow$

$$-y_m \sin(\omega t) = -y_m \sin\left[\omega(t+T)\right] = -y_m \sin(\omega t + \omega T) \rightarrow \omega T = 2\pi \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$$

(16-6)

$$\boxed{v = \frac{\omega}{k}}$$



A velocidade de uma onda

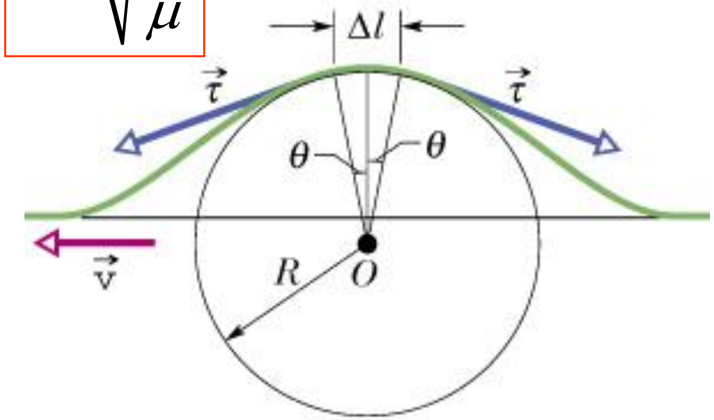
Na figura, mostramos dois instantaneos de uma onda harmonica tomadas em momentos t e t+Δt. Durante o intervalo de tempo Δt a onda viajou uma distancia Δx A velocidade de onda v= $\Delta x / \Delta t$. Um método para encontrar v é imaginar nos movendo com a mesma velocidade da onda ao longo do eixo x. Neste caso a onda iria nos parecer não mudar.

Desde $y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t)$ isso significa que o argumento da função seno é constante. $kx - \omega t = \text{constante}$. Tomamos o derivada com respeito à t.

$$k\frac{dx}{dt} - \omega = 0 \rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}$$ a velocidade de onda será $v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}$

Uma onda harmónica que se propaga para o lado negativo eixo x é descrita pela equação: $y(x,t) = y_m \sin(kx + \omega t)$. A função $y(x,t) = h(kx - \omega t)$ descreve uma onda geral que se propaga ao longo da positivo do eixo x. Uma onda geral que se propaga ao longo do negativo eixo e descrita pela equacao:: $y(x,t) = h(kx + \omega t)$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}}$$



Velocidade da onda em uma corda esticada

A seguir, vai determinar a velocidade de uma onda que propaga ao longo de uma cadeia linear, cuja densidade de massa μ. A tensão sobre a corda é igual para τ. Considere uma pequena parte da corda de comprimento $\Delta\ell$.

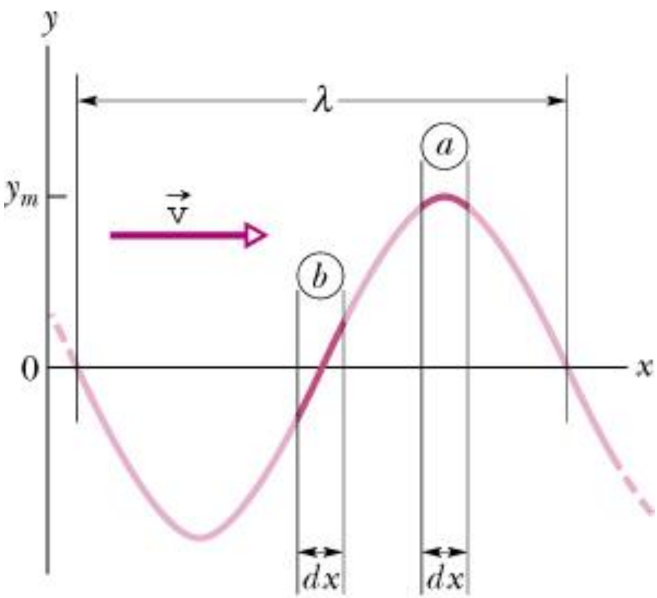
A forma do elemento pode ser aproximada a ser um arco de um círculo de raio R cujo centro é O. A força líquida na direcção de O é $F = 2(\tau \sin\theta)$.

Aqui assumimos que $\theta \ll 1 \rightarrow \sin\theta \simeq \theta = \dfrac{\Delta\ell}{2R} \rightarrow F = \tau \dfrac{\Delta\ell}{R}$ **(eqs.1)**

A força é também dada pela segunda lei de Newton: $F = \Delta m \dfrac{v^2}{R} = (\mu\Delta\ell)\dfrac{v^2}{R}$ **(eqs.2)**

Se compararmos as equações 1 e 2 temos: $(\mu\Delta\ell)\dfrac{v^2}{R} = \tau\dfrac{\Delta\ell}{R} \rightarrow v = \sqrt{\dfrac{\tau}{\mu}}$

Note : A velocidade v depende da tensão τ da densidade de massa μ mas não sobre a frequência de onda f.



Taxa de transmissão de energia **(16-8)**

Considere uma onda transversal propagando ao longo de uma corda que é descrito pela equação:

$y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t)$. A velocidade transversal

$u = \dfrac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_m \cos(kx - \omega t)$ No ponto a tanto y e u são iguais zero. No ponto b tanto y e u tem um máximo.

Em geral, a energia cinética de um elemento de massa dm é dada por: $dK = \dfrac{1}{2} dm v^2$

$dK = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} dx\right)\left[-\omega y_m \cos(kx - \omega t)\right]^2$ A taxa à qual a energia konetic propaga ao longo da corda é igual a $\dfrac{dK}{dt} = \dfrac{1}{2}\mu v \omega^2 y_m^2 \cos^2(kx - \omega t)$ A taxa média

$\left(\dfrac{dK}{dt}\right)_{avg} = \dfrac{1}{2}\mu v \omega^2 y_m^2 \left[\cos^2(kx - \omega t)\right]_{avg} = \dfrac{1}{4}\mu v \omega^2 y_m^2$ Como num caso de oscilação em sistema mola $\left(\dfrac{dU}{dt}\right)_{avg} = \left(\dfrac{dK}{dt}\right)_{avg} \rightarrow P_{avg} = \left(\dfrac{dU}{dt}\right)_{avg} + \left(\dfrac{dK}{dt}\right)_{avg} = \dfrac{1}{2}\mu v \omega^2 y_m^2$

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

A equação de onda

Considere uma corda de densidade de massa μ e tensão τ

Uma onda transversal propaga ao longo da *corda*.

O movimento transversal é descrito por $y(x,t)$

Considere um elemento de comprimento dx e massa $dm = \mu dx$

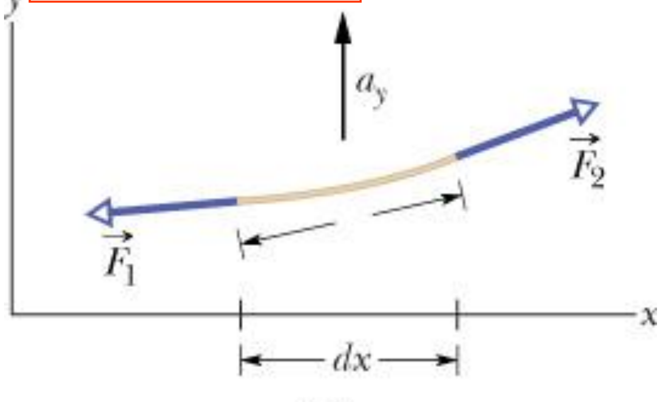
A força $F_1 = F_2 = \tau$

a força de líquida ao longo do eixo y é dada pela equação:

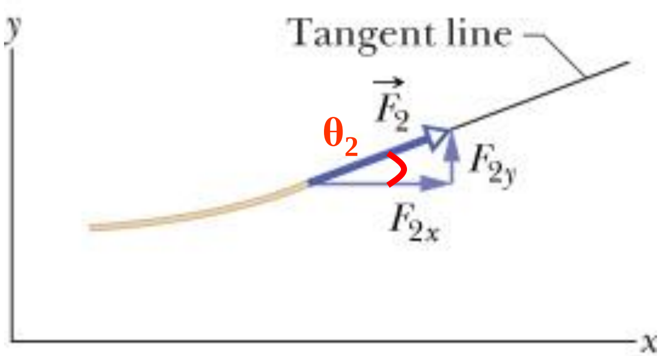
$F_{yres} = F_2 \sin\theta_2 - F_1 \sin\theta_1 = \tau\left(\sin\theta_2 - \sin\theta_1\right)$ Aqui nós

assumir que $\theta_1 \ll 1$ e $\theta_2 \ll 1 \rightarrow \sin\theta_1 \simeq \tan\theta_1 = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1$

e $\sin\theta_2 \simeq \tan\theta_2 = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_2 \rightarrow F_{yres} = \tau\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1\right]$



(a)

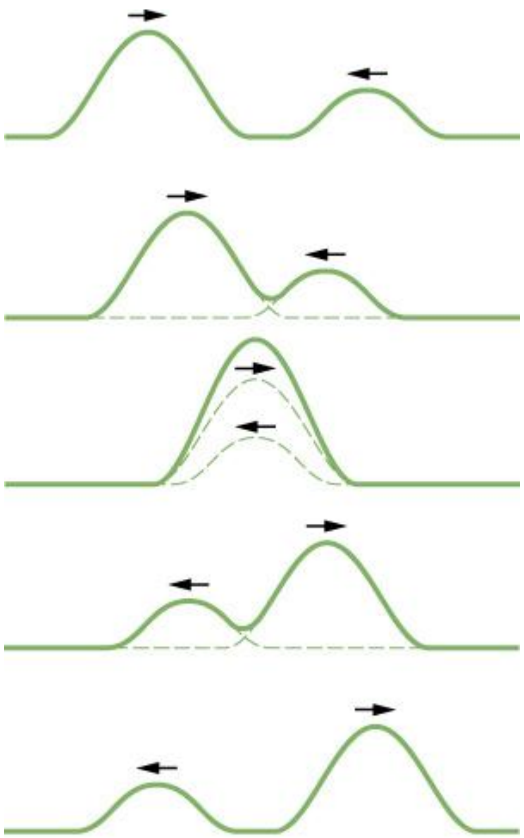


(b)

Da segunda lei de Newton, temos: $F_{yres} = dma_y = \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \tau\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1\right] \rightarrow$

$$\tau\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1\right] = \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \rightarrow \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1}{dx} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\tau}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$\boxed{y'(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)}$ O princípio da superposição de ondas



A equação de onda $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \dfrac{\mu}{\tau}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ foi derivada de uma onda transversal propaga ao longo uma seqüência sob tensão, é verdade para todos os tipos de ondas.

Esta equação é "linear", que significa que se y_1 e y_2 são as soluções da equação de onda, a função $c_1 y_1 + c_2 y_2$ é também uma solução.

Aquí c_1 e c_2 são constantes.

O princípio da superposição é uma conseqüência direta da linearidade da equação de onda. Este princípio pode ser expressa como se segue:

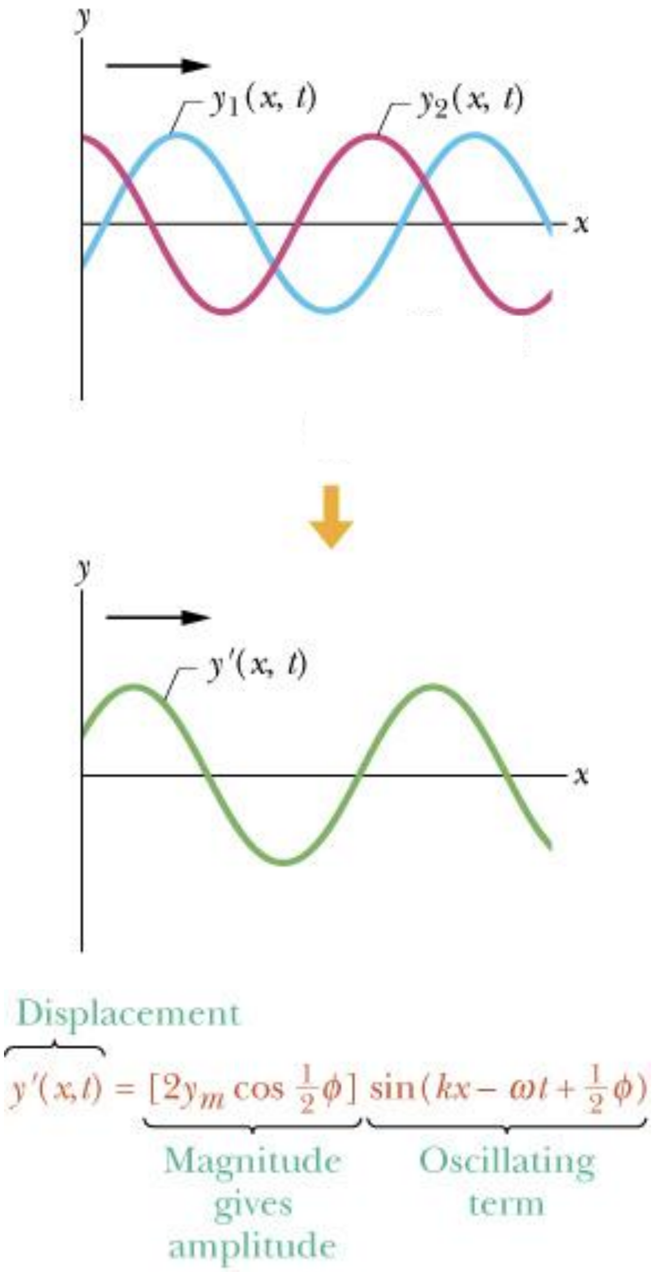
Considere duas ondas do mesmo tipo que se sobrepõem em algum ponto P no espaço.

Assumir que as funções s $y_1(x,t)$ e $y_2(x,t)$ descrevem os deslocamentos.

Se a onda chegou ao ponto P sozinha. O deslocamento em P quando ambas as ondas estão presentes é dada por: $y'(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$

Nota: Sobreposição de ondas não altera em nada a propagação da outra **(16-10)**

(16-11)



Interferência de ondas

Considere duas ondas harmônicas de mesma amplitude e freqüência que se propagam ao longo do eixo-x. A diferença de fase das duas ondas é dado por ϕ. Nós irá combinar estas ondas usando o princípio do superposição. O fenômeno das ondas de pentear é sobra conhecido como interferência e as duas ondas são disse interferir. O deslocamento das duas ondas

$$y_1(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t) \text{ e } y_2(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t + \phi).$$

$$y' = y_1 + y_2$$

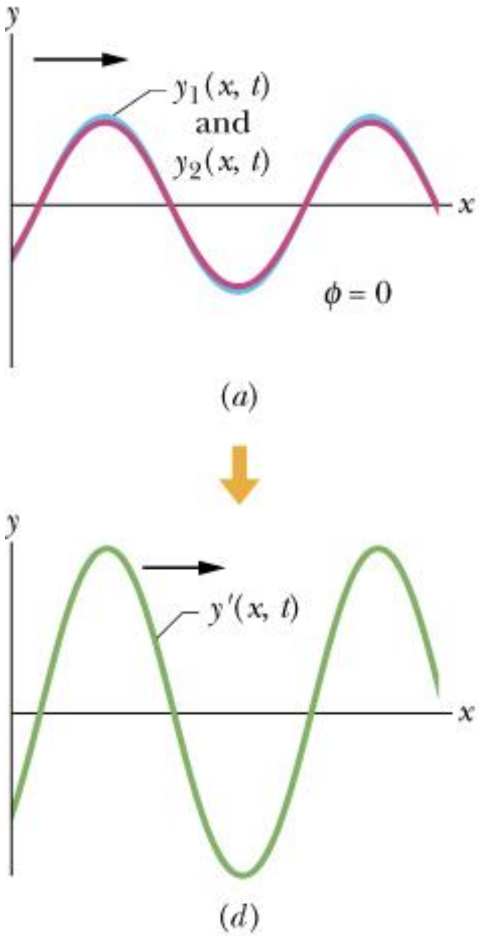
$$y'(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t) + y_m \sin(kx - \omega t + \phi)$$

$$y'(x,t) = \left[2y_m \cos\frac{\phi}{2}\right] \sin\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right)$$

A onda resultante tem a mesma frequência as ondas originais, e sua amplitude é dada por

$$y'_m = \left|2y_m \cos\frac{\phi}{2}\right| \quad \text{A sua fase é igual a } \frac{\phi}{2}$$

(16-12)



Interferência construtiva

A amplitude de duas ondas interefering é dada por::

$y'_m = \left|2y_m \cos\frac{\phi}{2}\right|$ Tem o seu valor máximo se $\phi = 0$

Neste caso $y'_m = 2y_m$

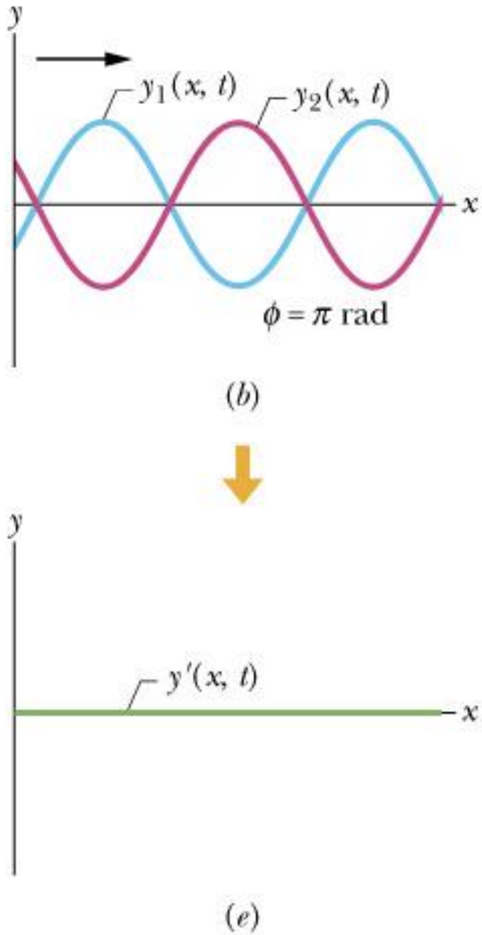
O deslocamento da onda resultante é:

$$y'(x,t) = [2y_m]\sin\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right)$$

Este fenômeno é conhecido como

totalmente interferência construtiva

(16-13)



Interferência destrutiva

A amplitude de duas ondas interefering é dada por:

$$y'_m = \left|2y_m \cos\frac{\phi}{2}\right|$$ Ela tem o seu valor mínimo, se $\phi = \pi$

Neste caso $y'_m = 0$

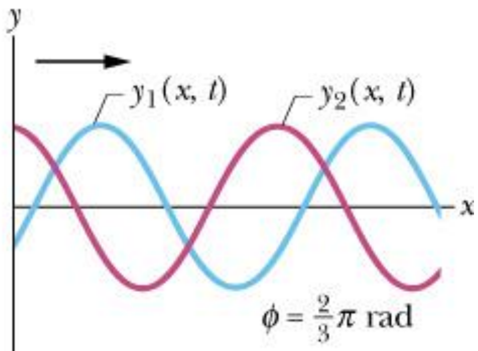
O deslocamento da onda resultante é:

$$y'(x,t) = 0$$

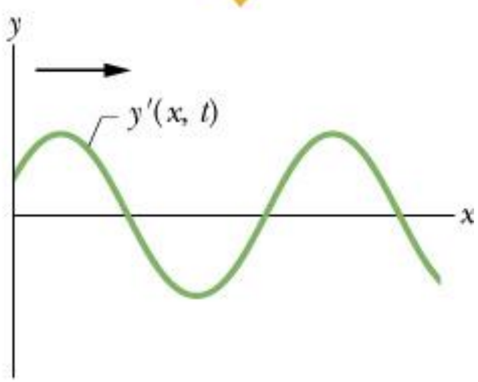
Este fenômeno é conhecido como

interferência totalmente destrutiva

Interferência Intermediate



(c)



(f)

A amplitude de duas ondas interefering é dada por:

$$y'_m = \left|2y_m \cos\frac{\phi}{2}\right|$$

Quando a interferência é nem totalmente construtiva nem totalmente destrutiva é chamado interferência intermediária

Um exemplo é dado na figura para $\phi = \dfrac{2\pi}{3}$

Neste caso $\quad y'_m = y_m$

O deslocamento da onda resultante é:

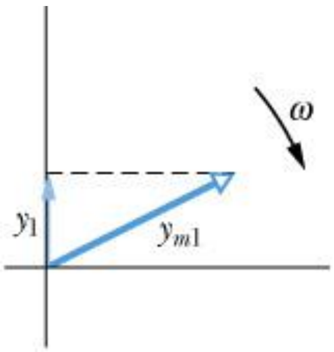
$$y'(x,t) = [y_m]\sin\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{3}\right)$$

Nota: Às vezes a diferença de fase é expressa como uma diferença de comprimento de onda λ

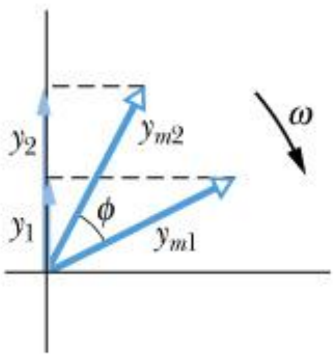
Neste caso note que:

2π radians $\leftrightarrow$ 1λ

Fasores



(a)



(b)

Um fasor é um método para a representação de uma onda cuja dislocamento é: $y_1(x,t) = y_{m1}\sin(kx - \omega t)$

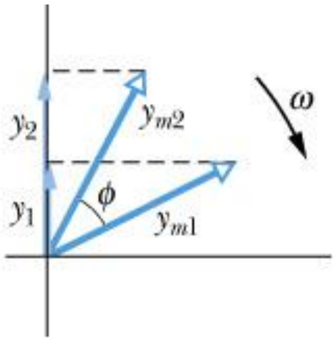
O fasor é definido como um vetor com o seguinte propriedades:

1. A sua magnitude é igual a amplitude da onda y_{m1}
2. O fasor tem a sua cauda na origem O e gira em a direcção dos ponteiros do relógio sobre um eixo que passa O com uma velocidade angular ω.

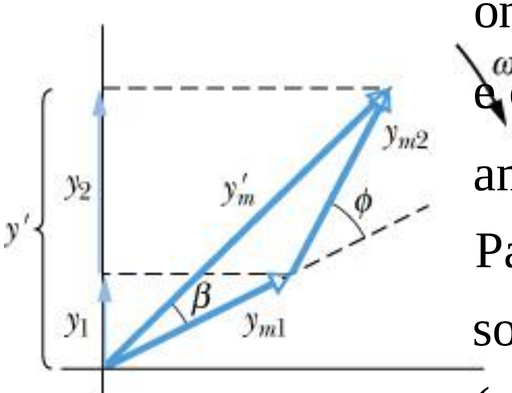
Assim definida, a projeção do fasor sobre o eixo-y (i.e. suas componentes y) é igual a $y_{m1}\sin(kx - \omega t)$

Um diagrama de fasorial pode ser usado para representar mais de um ondas. (veja fig.b). O deslocamento da segunda onda é:

$y_2(x,t) = y_{m2}\sin(kx - \omega t + \phi)$ O fasor da segunda onda forma um angulo ϕ e o fasor da primeira onda indicando que esta atrasada em relacao onda 1 por um angulo de fase ϕ.



(b)



(c)

(16 - 16)

Usando fasores

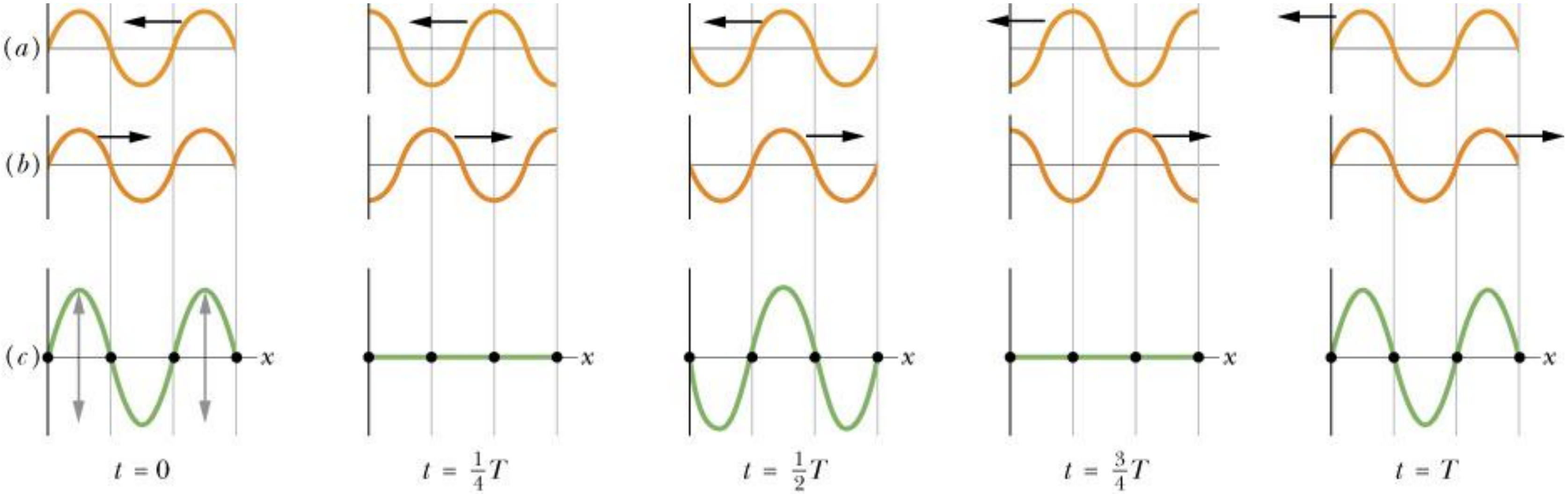
Considere duas ondas que têm a mesma frequência mas as amplitudes diferentes. Eles também têm uma diferença fase ϕ. Os deslocamentos das duas ondas são: $y_1(x,t) = y_{m1}\sin(kx - \omega t)$ e $y_2(x,t) = y_{m2}\sin(kx - \omega t + \phi)$. A sobreposição dos dois ondas produz uma onda que tem a mesma frequência angular ω e é descrita: $y' = y'_m \sin(kx - \omega t + \beta)$ Aquí y'_m ie o amplitude da onda e β o angulo de fase.

Para determinar y'_m e β

somarmos os dois fasores representando as ondas como vetores (veja fig.c).

Nota: O método de fasor pode ser usado para adicionar vectores que têm amplitudes diferentes.

$$\boxed{y'(x,t) = [2y_m \sin kx] \cos \omega t}$$



Ondas estacionárias.

Considere a superposição de duas ondas que têm o mesmo frequência e amplitude, mas que se deslocam em direções opostas.

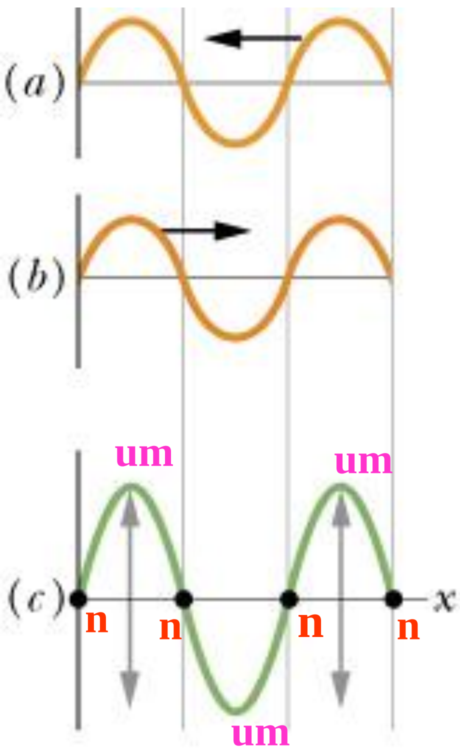
Os deslocamentosde duas ondas são: $y_1(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t)$,

$y_2(x,t) = y_m \sin(kx + \omega t)$

O deslocamento da onda resultante $y'(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$

$$y'(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t) + y_m \sin(kx + \omega t) = [2y_m \sin kx] \cos \omega t \quad \textbf{(16 - 17)}$$

Esta não é uma onda mas uma oscilação que tem uma posição dependente da amplitude . É conhecido como uma onda estacionária.



(16 - 18)

O deslocamento de uma onda estacionária é dada pela equação: $y'(x,t) = [2y_m \sin kx]\cos \omega t$

A amplitude é dependente posição e é igual $2y_m \sin kx$

Nos : Estes são definidos como posições onde a amplitude da onda estacionária desaparece.

Elas ocorrem quando $kx = n\pi \quad n = 0,1,2,$

$$\rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} x = n\pi \rightarrow x_n = n\frac{\lambda}{2} \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Anti - nos : Estes são definidos como posições onde a amplitude da onda estacionária é máxima..

Eles ocorrem quando $kx = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad n = 0,1,2,\ldots$

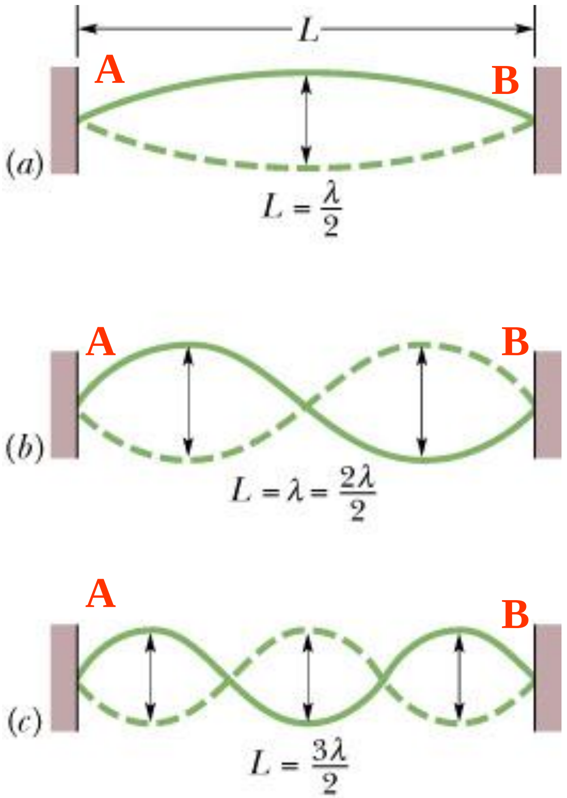
$$\rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \rightarrow x_n' = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Nota 1: A distância entre nós e anti-nos ajacentes é $\lambda/2$

Nota 2: A distância entre um nó e um anti-nó é $\lambda/4$

Ondas estacionárias e ressonância

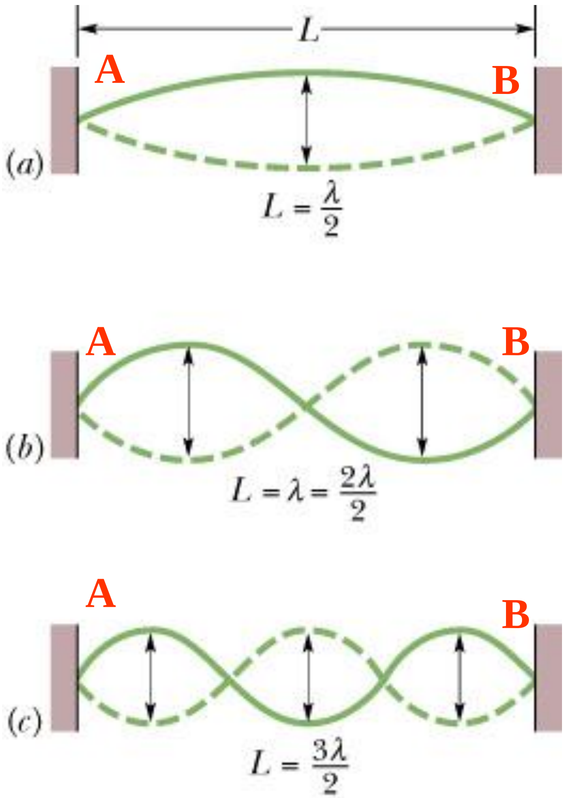
(16 - 19)



Considere-se uma corda sob tensão que é presa nos pontos A e B separadas por uma distância *L*. Enviamos uma onda harmônica que viaja para a direita. A onda é refletida no ponto B e, assim, a onda refletida viajará para a esquerda. A onda da esquerda reflete de volta no ponto A e cria uma terceira onda que viajar para a direita. Assim temos um grande número de ondas sobrepostas a meia ondas que viajam para a direita e o resto para a esquerda.

Para determinadas frequências a interferência produz uma onda estacionária. Tal onda é dito estar em ressonância. As frequências em que as ondas estacionárias ocorrem são conhecidos como o freqüências ressonantes do sistema.

(16 - 20)



Ressonâncias ocorrer quando uma onda estacionária resultante satisfazer a condição de contono CC do problema.
Esta CC é que a amplitude deve ser igual a zero no ponto A e no ponto B e surge do fato de que a corda é fixa nestes dois pontos e, por conseguinte, não podem se mover.

A ressonância primeiro é mostrado na fig.a. Assim $L = \dfrac{\lambda_1}{2}$ $\rightarrow \lambda_1 = 2L.$ A segunda onda estacionaria é mostrada na fig.b. Ele tem tres nós (dois deles em A e B)

Neste caso $L = 2\left(\dfrac{\lambda}{2}\right) = \lambda \rightarrow \ \lambda_2 = L$

A terceira onda estacionaria é mostrado na fig.c. Ela tem quatro nós (dois deles em A e B)

Neste caso $L = 3\left(\dfrac{\lambda}{2}\right) = \lambda \rightarrow \ \lambda_3 = \left(\dfrac{3}{2}\right)L.$ A expressão geral para a comprimentos de onda ressonante é: $\lambda_n = \dfrac{2L}{n} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$ as freqüências ressonantes $f_n = \dfrac{v}{\lambda_n} = n\dfrac{v}{2L}$