

Funções trigonométricas, parte 5

Definições das funções trigonométricas inversas

Giuliano Boava

Preliminares: um pouco sobre escrita e notação

- ▶ Se não tivéssemos “inventado” a raiz quadrada, você saberia resolver a equação $x^2 = 3$?

Preliminares: um pouco sobre escrita e notação

- ▶ Se não tivéssemos “inventado” a raiz quadrada, você saberia resolver a equação $x^2 = 3$?
- ▶ A raiz foi inventada justamente para poder escrever as soluções dessa equação.

Preliminares: um pouco sobre escrita e notação

- ▶ Se não tivéssemos “inventado” a raiz quadrada, você saberia resolver a equação $x^2 = 3$?
- ▶ A raiz foi inventada justamente para poder escrever as soluções dessa equação.
- ▶ Como há duas soluções para a equação acima (uma positiva e uma negativa), então fomos obrigados a convencionar que o símbolo $\sqrt{3}$ é uma destas duas soluções, e convencionou-se que é a solução positiva. Dessa forma a solução negativa da equação é $-\sqrt{3}$.

Preliminares: um pouco sobre escrita e notação

- ▶ Se não tivéssemos “inventado” a raiz quadrada, você saberia resolver a equação $x^2 = 3$?
- ▶ A raiz foi inventada justamente para poder escrever as soluções dessa equação.
- ▶ Como há duas soluções para a equação acima (uma positiva e uma negativa), então fomos obrigados a convencionar que o símbolo $\sqrt{3}$ é uma destas duas soluções, e convencionou-se que é a solução positiva. Dessa forma a solução negativa da equação é $-\sqrt{3}$.
- ▶ Conclusão: o símbolo de raiz foi inventado para dar nome às soluções de uma equação.

Preliminares: um pouco sobre escrita e notação

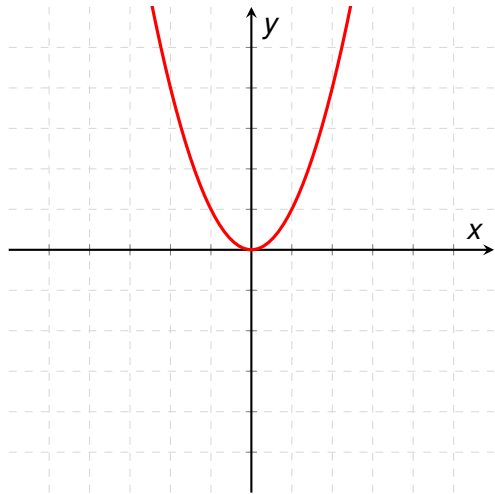
- ▶ Se não tivéssemos “inventado” a raiz quadrada, você saberia resolver a equação $x^2 = 3$?
- ▶ A raiz foi inventada justamente para poder escrever as soluções dessa equação.
- ▶ Como há duas soluções para a equação acima (uma positiva e uma negativa), então fomos obrigados a convencionar que o símbolo $\sqrt{3}$ é uma destas duas soluções, e convencionou-se que é a solução positiva. Dessa forma a solução negativa da equação é $-\sqrt{3}$.
- ▶ Conclusão: o símbolo de raiz foi inventado para dar nome às soluções de uma equação.
- ▶ Algumas raízes conseguimos calcular o resultado na mão, outras ficam apenas indicadas como raízes: $\sqrt{36} = 6$; $\sqrt{5} = \sqrt{5}$. Outras podem ser reescritas a partir de outras raízes: $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Preliminares: um pouco sobre escrita e notação

- ▶ Se não tivéssemos “inventado” a raiz quadrada, você saberia resolver a equação $x^2 = 3$?
- ▶ A raiz foi inventada justamente para poder escrever as soluções dessa equação.
- ▶ Como há duas soluções para a equação acima (uma positiva e uma negativa), então fomos obrigados a convencionar que o símbolo $\sqrt{3}$ é uma destas duas soluções, e convencionou-se que é a solução positiva. Dessa forma a solução negativa da equação é $-\sqrt{3}$.
- ▶ Conclusão: o símbolo de raiz foi inventado para dar nome às soluções de uma equação.
- ▶ Algumas raízes conseguimos calcular o resultado na mão, outras ficam apenas indicadas como raízes: $\sqrt{36} = 6$; $\sqrt{5} = \sqrt{5}$. Outras podem ser reescritas a partir de outras raízes: $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.
- ▶ Depois de um tempo, acostumamos com o número $\sqrt{3}$, ele passa a fazer parte da nossa escrita. Quando precisarmos de um valor aproximado, a calculadora nos dá. E também acostumamos com a propriedade que define esse número: ele é solução da equação $x^2 = 3$, isto é, quando o x for substituído por $\sqrt{3}$ a igualdade torna-se verdadeira. Em outras palavras, $(\sqrt{3})^2 = 3$.

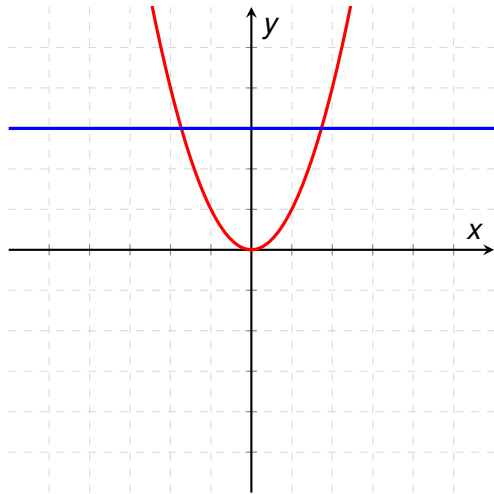
Preliminares: um pouco sobre escrita e notação

Do ponto de vista de funções, considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$.



Preliminares: um pouco sobre escrita e notação

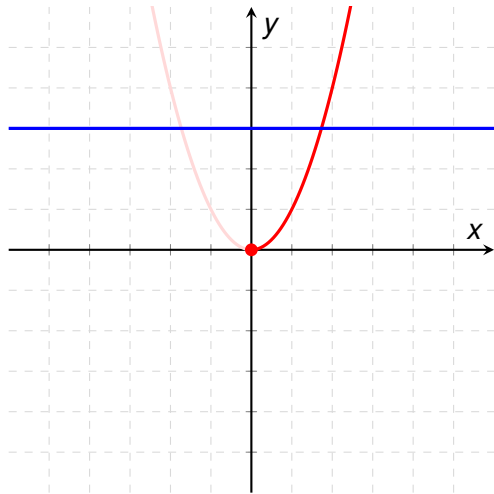
Do ponto de vista de funções, considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$.



- f não é injetora nem sobrejetora. Trocando o domínio para $[0, \infty)$ e o contradomínio para $[0, \infty)$, f torna-se bijetora. Seu novo gráfico é...

Preliminares: um pouco sobre escrita e notação

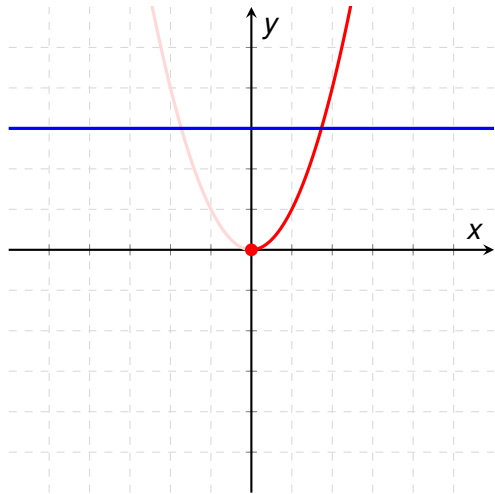
Do ponto de vista de funções, considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$.



- ▶ f não é injetora nem sobrejetora. Trocando o domínio para $[0, \infty)$ e o contradomínio para $[0, \infty)$, f torna-se bijetora. Seu novo gráfico é...

Preliminares: um pouco sobre escrita e notação

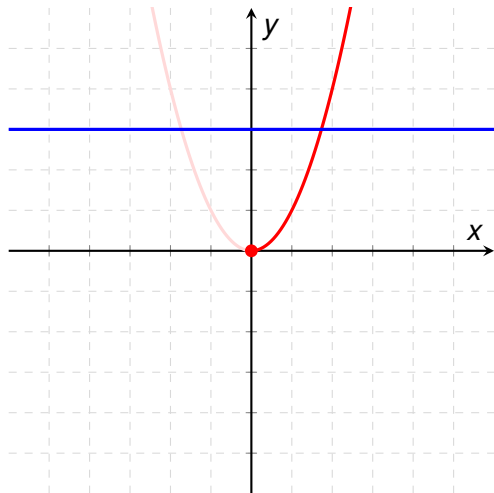
Do ponto de vista de funções, considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$.



- ▶ f não é injetora nem sobrejetora. Trocando o domínio para $[0, \infty)$ e o contradomínio para $[0, \infty)$, f torna-se bijetora. Seu novo gráfico é...
- ▶ O símbolo de raiz quadrada pode ser pensado como o símbolo inventado para servir como função inversa de f . Neste caso, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Preliminares: um pouco sobre escrita e notação

Do ponto de vista de funções, considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$.



- ▶ f não é injetora nem sobrejetora. Trocando o domínio para $[0, \infty)$ e o contradomínio para $[0, \infty)$, f torna-se bijetora. Seu novo gráfico é...
- ▶ O símbolo de raiz quadrada pode ser pensado como o símbolo inventado para servir como função inversa de f . Neste caso, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.
- ▶ Ao mesmo tempo, descobrimos que o resultado de uma raiz quadrada deve ser maior ou igual a 0 e também que só faz sentido calcular raízes de números maiores ou iguais a 0.

Preliminares: um pouco sobre escrita e notação

- ▶ Se não tivéssemos “inventado” o logaritmo, você saberia resolver a equação $2^x = 5$?

Preliminares: um pouco sobre escrita e notação

- ▶ Se não tivéssemos “inventado” o logaritmo, você saberia resolver a equação $2^x = 5$?
- ▶ A logaritmo foi inventado justamente para pode escrever as soluções dessa equação.

Preliminares: um pouco sobre escrita e notação

- ▶ Se não tivéssemos “inventado” o logaritmo, você saberia resolver a equação $2^x = 5$?
- ▶ A logaritmo foi inventado justamente para pode escrever as soluções dessa equação.
- ▶ Como essa equação só possui uma solução, não precisamos fazer nenhuma convenção. O número $\log_2 5$ é o único número solução da equação acima.

Preliminares: um pouco sobre escrita e notação

- ▶ Se não tivéssemos “inventado” o logaritmo, você saberia resolver a equação $2^x = 5$?
- ▶ A logaritmo foi inventado justamente para pode escrever as soluções dessa equação.
- ▶ Como essa equação só possui uma solução, não precisamos fazer nenhuma convenção. O número $\log_2 5$ é o único número solução da equação acima.
- ▶ Conclusão: o símbolo de logaritmo foi inventado para dar nome às soluções de uma equação.

Preliminares: um pouco sobre escrita e notação

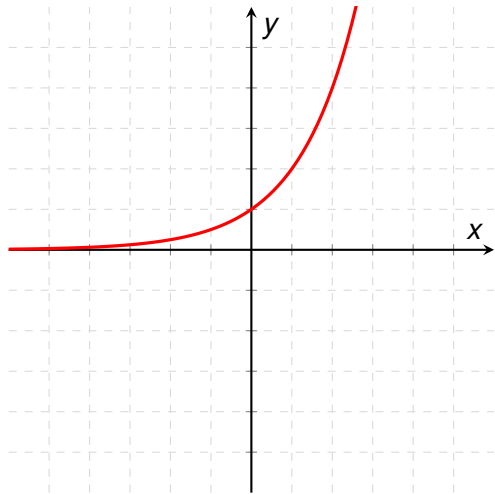
- ▶ Se não tivéssemos “inventado” o logaritmo, você saberia resolver a equação $2^x = 5$?
- ▶ A logaritmo foi inventado justamente para pode escrever as soluções dessa equação.
- ▶ Como essa equação só possui uma solução, não precisamos fazer nenhuma convenção. O número $\log_2 5$ é o único número solução da equação acima.
- ▶ Conclusão: o símbolo de logaritmo foi inventado para dar nome às soluções de uma equação.
- ▶ Alguns logaritmos conseguimos calcular o resultado na mão, outros ficam apenas indicados como logaritmos: $\log_2 8 = 3$; $\log_2 3 = \log_2 3$. Outros podem ser reescritos a partir de outros logaritmos: $\log_2 9 = 2 \log_2 3$.

Preliminares: um pouco sobre escrita e notação

- ▶ Se não tivéssemos “inventado” o logaritmo, você saberia resolver a equação $2^x = 5$?
- ▶ A logaritmo foi inventado justamente para poder escrever as soluções dessa equação.
- ▶ Como essa equação só possui uma solução, não precisamos fazer nenhuma convenção. O número $\log_2 5$ é o único número solução da equação acima.
- ▶ Conclusão: o símbolo de logaritmo foi inventado para dar nome às soluções de uma equação.
- ▶ Alguns logaritmos conseguimos calcular o resultado na mão, outros ficam apenas indicados como logaritmos: $\log_2 8 = 3$; $\log_2 3 = \log_2 3$. Outros podem ser reescritos a partir de outros logaritmos: $\log_2 9 = 2 \log_2 3$.
- ▶ Depois de um tempo, acostumamos com o número $\log_2 5$, ele passa a fazer parte da nossa escrita. Quando precisarmos de um valor aproximado, a calculadora nos dá. E também acostumamos com a propriedade que define esse número: ele é solução da equação $2^x = 5$, isto é, quando o x for substituído por $\log_2 5$ a igualdade torna-se verdadeira. Em outras palavras, $2^{\log_2 5} = 5$.

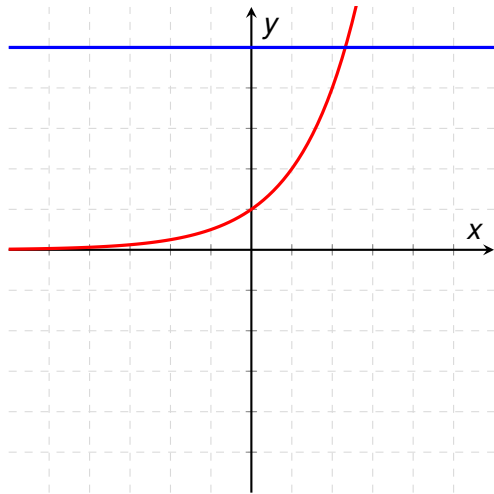
Preliminares: um pouco sobre escrita e notação

Do ponto de vista de funções, considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2^x$.



Preliminares: um pouco sobre escrita e notação

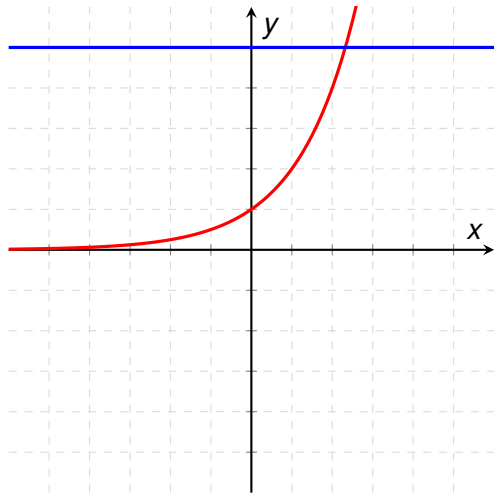
Do ponto de vista de funções, considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2^x$.



- f é injetora mas não é sobrejetora. Trocando o contradomínio para $(0, \infty)$, f torna-se bijetora.

Preliminares: um pouco sobre escrita e notação

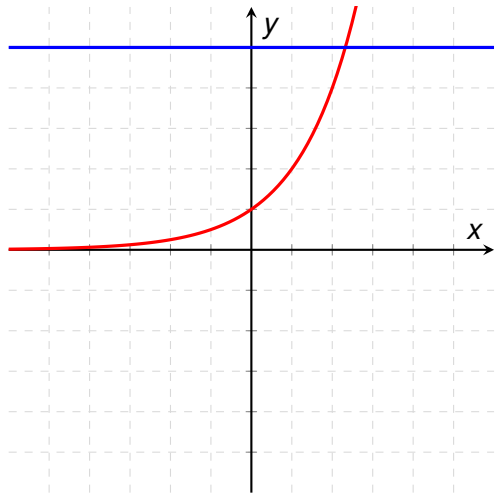
Do ponto de vista de funções, considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2^x$.



- ▶ f é injetora mas não é sobrejetora. Trocando o contradomínio para $(0, \infty)$, f torna-se bijetora.
- ▶ O símbolo de logaritmo pode ser pensado como o símbolo inventado para servir como função inversa de f . Neste caso, $f^{-1}(x) = \log_2 x$.

Preliminares: um pouco sobre escrita e notação

Do ponto de vista de funções, considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2^x$.



- ▶ f é injetora mas não é sobrejetora. Trocando o contradomínio para $(0, \infty)$, f torna-se bijetora.
- ▶ O símbolo de logaritmo pode ser pensado como o símbolo inventado para servir como função inversa de f . Neste caso, $f^{-1}(x) = \log_2 x$.
- ▶ Ao mesmo tempo, descobrimos que o resultado de um logaritmo pode ser qualquer número real e também que só faz sentido calcular logaritmos de números positivos.

Preliminares: um pouco sobre escrita e notação

- ▶ Se não tivéssemos “inventado” cosseno e seno, que nome você daria às coordenadas do ponto terminal de um número t ?

Preliminares: um pouco sobre escrita e notação

- ▶ Se não tivéssemos “inventado” cosseno e seno, que nome você daria às coordenadas do ponto terminal de um número t ?
- ▶ Cosseno e seno foram inventados justamente para dar nomes a essas coordenadas.

Preliminares: um pouco sobre escrita e notação

- ▶ Se não tivéssemos “inventado” cosseno e seno, que nome você daria às coordenadas do ponto terminal de um número t ?
- ▶ Cosseno e seno foram inventados justamente para dar nomes a essas coordenadas.
- ▶ Alguns cossenos e senos conseguimos calcular o resultado na mão, outros ficam apenas indicados: $\cos(\pi/3) = 1/2$; $\sin(2\pi) = 0$; $\cos(\pi/35) = \cos(\pi/35)$; $\sin(1) = \sin(1)$. Outros podem ser reescritos a partir de outros cossenos e senos: $\cos(17\pi/18) = -\cos(\pi/18)$.

Preliminares: um pouco sobre escrita e notação

- ▶ Se não tivéssemos “inventado” cosseno e seno, que nome você daria às coordenadas do ponto terminal de um número t ?
- ▶ Cosseno e seno foram inventados justamente para dar nomes a essas coordenadas.
- ▶ Alguns cossenos e senos conseguimos calcular o resultado na mão, outros ficam apenas indicados: $\cos(\pi/3) = 1/2$; $\sin(2\pi) = 0$; $\cos(\pi/35) = \cos(\pi/35)$; $\sin(1) = \sin(1)$. Outros podem ser reescritos a partir de outros cossenos e senos: $\cos(17\pi/18) = -\cos(\pi/18)$.
- ▶ Depois de um tempo, acostumamos com números na forma $\cos t$ e $\sin t$, eles passam a fazer parte da nossa escrita. Quando precisarmos de um valor aproximado, a calculadora nos dá. E também acostumamos com a propriedade que define esses números: eles são as coordenadas do ponto terminal do número t .

Função arco seno

Pergunta (1)

A equação $\sin x = 1/3$ possui solução?

Função arco seno

Pergunta (1)

A equação $\sin x = 1/3$ possui solução?

Pergunta (2)

Se sim, quem é(são) ela(s)? Quantas são?

Função arco seno

Pergunta (1)

A equação $\sin x = 1/3$ possui solução?

Pergunta (2)

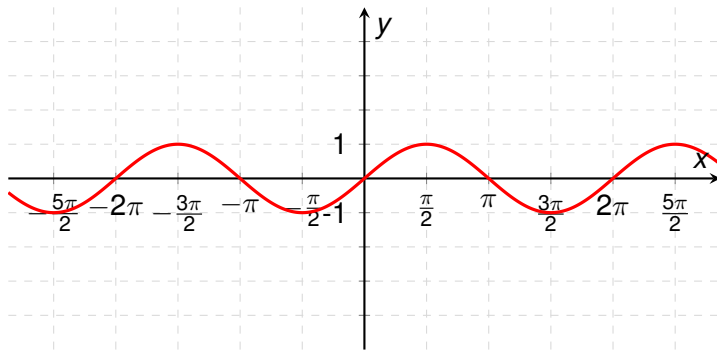
Se sim, quem é(são) ela(s)? Quantas são?

Pergunta (3)

Trocando $1/3$ por outro número, a equação passa a ter (ou não ter) solução?

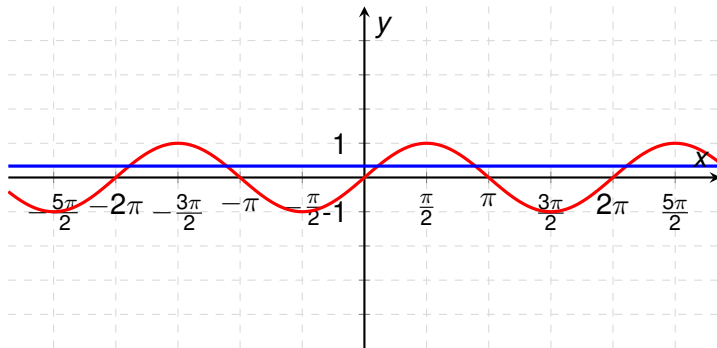
Função arco seno

Lembremos do gráfico da função seno:



Função arco seno

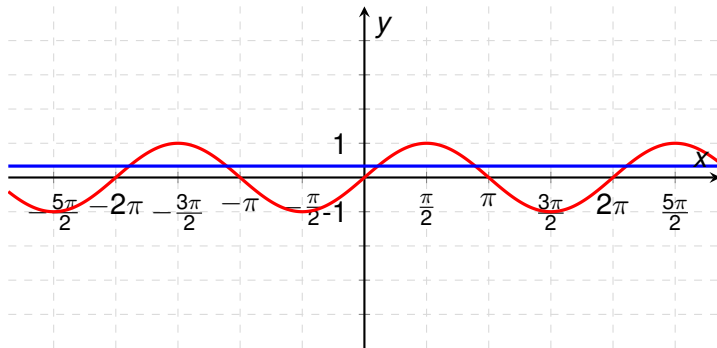
Lembremos do gráfico da função seno:



Função arco seno

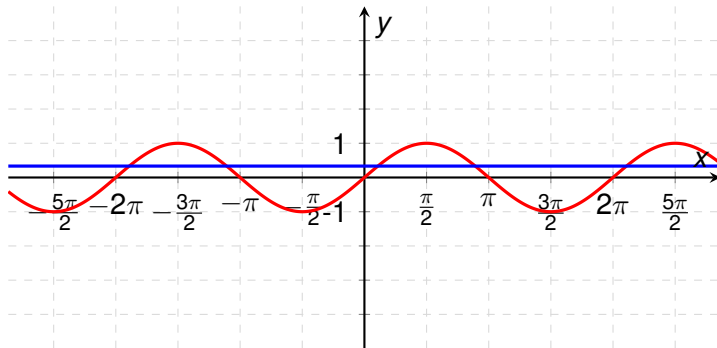
(1) Sim, há solução.

Lembremos do gráfico da função seno:



Função arco seno

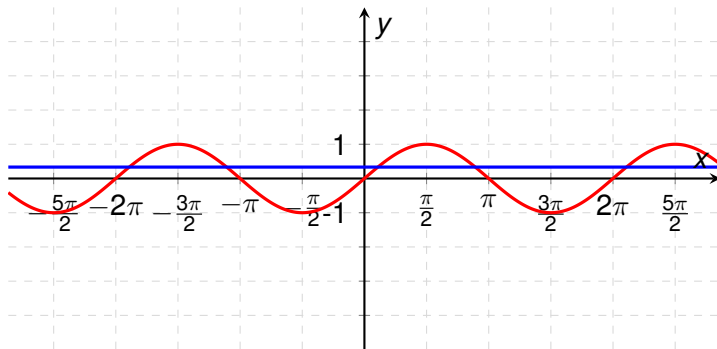
Lembremos do gráfico da função seno:



- (1) Sim, há solução.
- (2) Há infinitas soluções.
Conseguimos vê-las no gráfico, mas não temos nomes para elas.

Função arco seno

Lembremos do gráfico da função seno:



- (1) Sim, há solução.
- (2) Há infinitas soluções.
Conseguimos vê-las no gráfico, mas não temos nomes para elas.
- (3) $\sin x = y$ possui solução quando $y \in [-1, 1]$.

Função arco seno

- ▶ Conclusão: a função $f : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$ dada por $f(x) = \sin x$ é bijetora e, portanto, possui inversa.

Função arco seno

- ▶ Conclusão: a função $f : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$ dada por $f(x) = \sin x$ é bijetora e, portanto, possui inversa.
- ▶ Sua inversa ainda não possui nome, pois não há nome para o x isolado na equação $\sin x = 1/3$, por exemplo.

Função arco seno

- ▶ Conclusão: a função $f : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$ dada por $f(x) = \sin x$ é bijetora e, portanto, possui inversa.
- ▶ Sua inversa ainda não possui nome, pois não há nome para o x isolado na equação $\sin x = 1/3$, por exemplo.
- ▶ O nome que escolhemos foi $\arcsen 1/3$. Assim, criamos a função $f^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ dada por $f^{-1}(x) = \arcsen x$.

Função arco seno

- ▶ Conclusão: a função $f : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$ dada por $f(x) = \sin x$ é bijetora e, portanto, possui inversa.
- ▶ Sua inversa ainda não possui nome, pois não há nome para o x isolado na equação $\sin x = 1/3$, por exemplo.
- ▶ O nome que escolhemos foi $\arcsen 1/3$. Assim, criamos a função $f^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ dada por $f^{-1}(x) = \arcsen x$.
- ▶ Ganhamos de brinde que só é permitido calcular $\arcsen x$ se $x \in [-1, 1]$ e que o resultado de $\arcsen x$ é um número que pertence a $[-\pi/2, \pi/2]$.

Função arco seno

- ▶ Conclusão: a função $f : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$ dada por $f(x) = \sin x$ é bijetora e, portanto, possui inversa.
- ▶ Sua inversa ainda não possui nome, pois não há nome para o x isolado na equação $\sin x = 1/3$, por exemplo.
- ▶ O nome que escolhemos foi $\arcsen 1/3$. Assim, criamos a função $f^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ dada por $f^{-1}(x) = \arcsen x$.
- ▶ Ganhamos de brinde que só é permitido calcular $\arcsen x$ se $x \in [-1, 1]$ e que o resultado de $\arcsen x$ é um número que pertence a $[-\pi/2, \pi/2]$.
- ▶ Também ganhamos um nome para uma solução da equação $\sin x = 1/3$, uma das soluções é $x = \arcsen 1/3$.

Função arco seno

- ▶ Conclusão: a função $f : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$ dada por $f(x) = \sin x$ é bijetora e, portanto, possui inversa.
- ▶ Sua inversa ainda não possui nome, pois não há nome para o x isolado na equação $\sin x = 1/3$, por exemplo.
- ▶ O nome que escolhemos foi $\arcsen 1/3$. Assim, criamos a função $f^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ dada por $f^{-1}(x) = \arcsen x$.
- ▶ Ganhamos de brinde que só é permitido calcular $\arcsen x$ se $x \in [-1, 1]$ e que o resultado de $\arcsen x$ é um número que pertence a $[-\pi/2, \pi/2]$.
- ▶ Também ganhamos um nome para uma solução da equação $\sin x = 1/3$, uma das soluções é $x = \arcsen 1/3$.
- ▶ Usando que $x = \arcsen 1/3$ é solução desta equação, então $\sin(\arcsen 1/3) = 1/3$.

Função arco seno

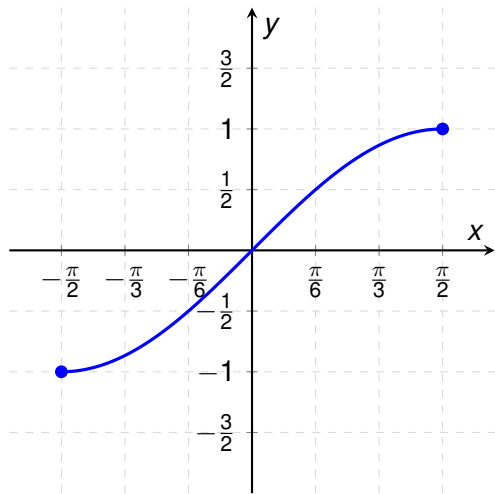
- ▶ Conclusão: a função $f : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$ dada por $f(x) = \sin x$ é bijetora e, portanto, possui inversa.
- ▶ Sua inversa ainda não possui nome, pois não há nome para o x isolado na equação $\sin x = 1/3$, por exemplo.
- ▶ O nome que escolhemos foi $\arcsen 1/3$. Assim, criamos a função $f^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ dada por $f^{-1}(x) = \arcsen x$.
- ▶ Ganhamos de brinde que só é permitido calcular $\arcsen x$ se $x \in [-1, 1]$ e que o resultado de $\arcsen x$ é um número que pertence a $[-\pi/2, \pi/2]$.
- ▶ Também ganhamos um nome para uma solução da equação $\sin x = 1/3$, uma das soluções é $x = \arcsen 1/3$.
- ▶ Usando que $x = \arcsen 1/3$ é solução desta equação, então $\sin(\arcsen 1/3) = 1/3$.
- ▶ Mais uma conclusão: podemos não conhecer o valor exato de $\arcsen 1/3$, mas sabemos que ele é um número como qualquer outro. E ele foi escolhido para ser um número cujo seno é igual a $1/3$.

Função arco seno

Como é o gráfico da função $f(x) = \arcsen x$?

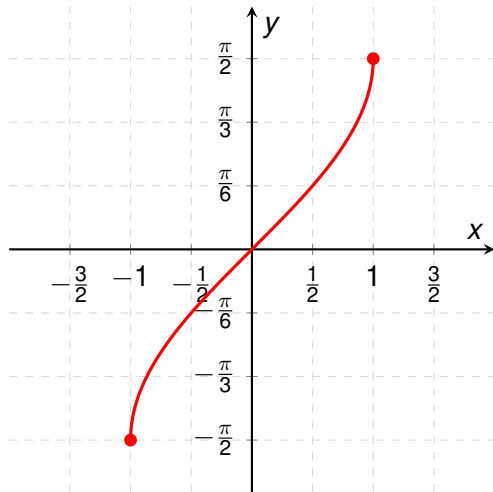
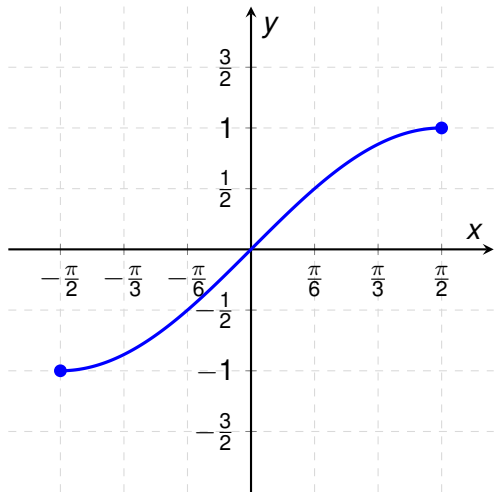
Função arco seno

Como é o gráfico da função $f(x) = \arcsen x$?



Função arco seno

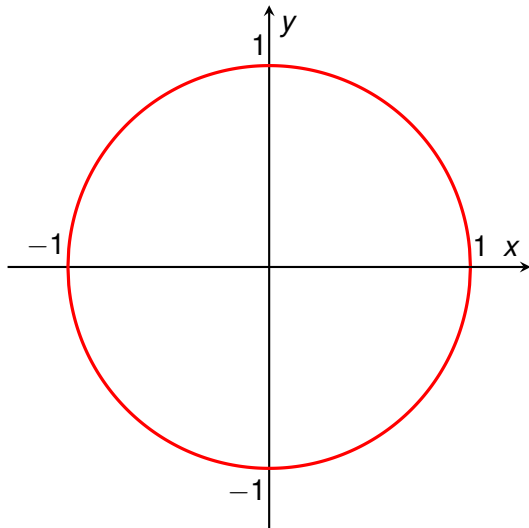
Como é o gráfico da função $f(x) = \arcsen x$?



Função arco seno

Exemplo

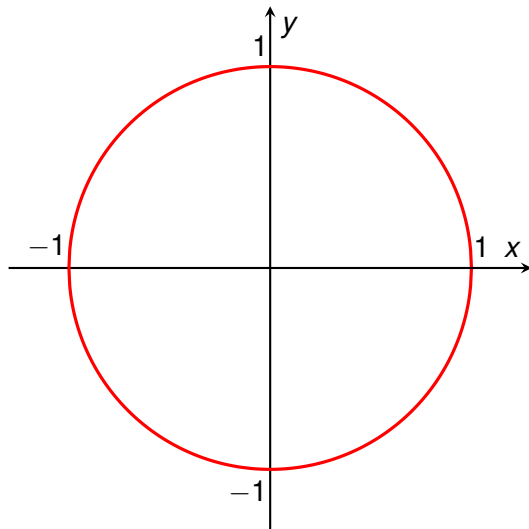
- ▶ $\arcsen 1 =$
- ▶ $\arcsen(-\sqrt{3}/2) =$



Função arco seno

Exercício

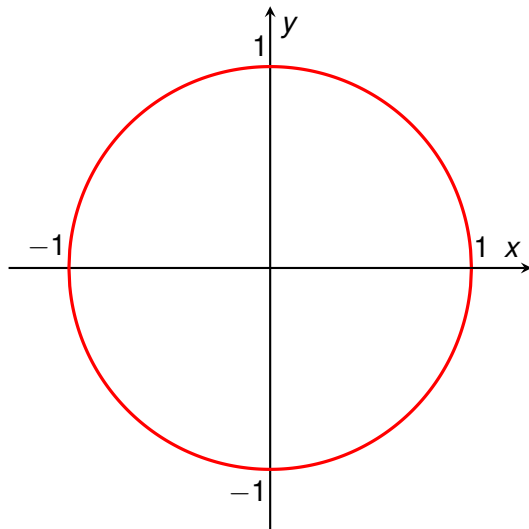
- ▶ $\arcsen(\sqrt{2}/2) =$
- ▶ $\arcsen(-1/2) =$
- ▶ $\sen(\arcsen x) =$
- ▶ $\arcsen(\sen x) =$



Função arco seno

Exercício

- ▶ Resolva a equação $\sin x = 1/2$.
- ▶ Resolva a equação $\sin x = 1/3$.



Função arco cosseno

Pergunta (1)

A equação $\cos x = 1/3$ possui solução?

Função arco cosseno

Pergunta (1)

A equação $\cos x = 1/3$ possui solução?

Pergunta (2)

Se sim, quem é(são) ela(s)? Quantas são?

Função arco cosseno

Pergunta (1)

A equação $\cos x = 1/3$ possui solução?

Pergunta (2)

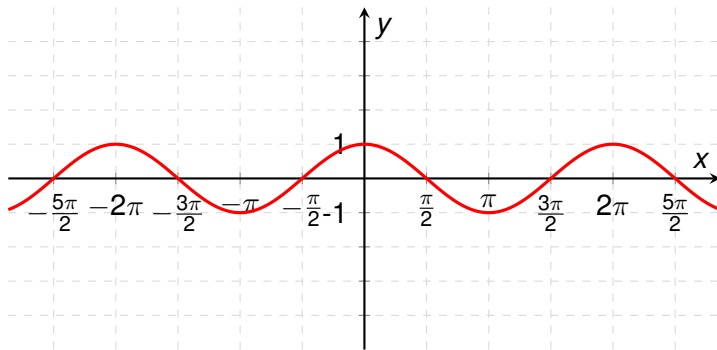
Se sim, quem é(são) ela(s)? Quantas são?

Pergunta (3)

Trocando $1/3$ por outro número, a equação passa a ter (ou não ter) solução?

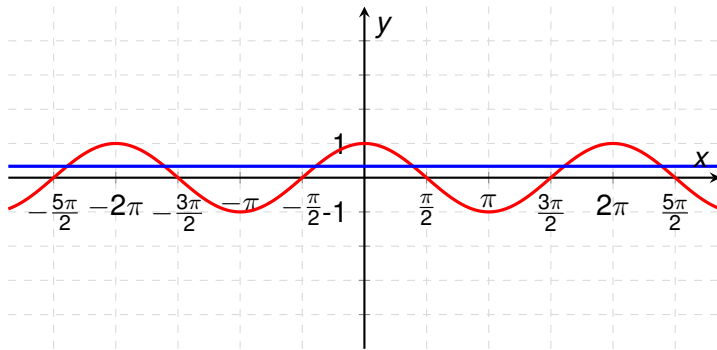
Função arco cosseno

Lembremos do gráfico da função cosseno:



Função arco cosseno

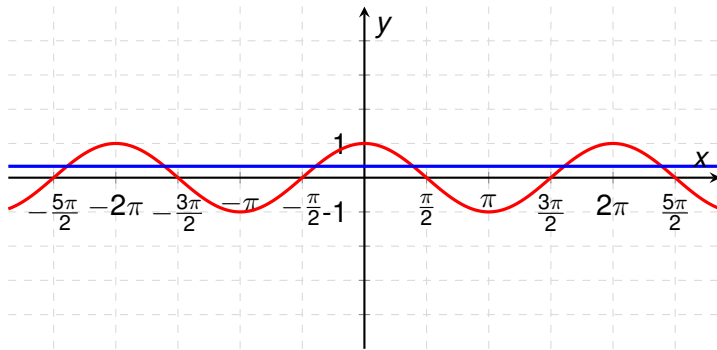
Lembremos do gráfico da função cosseno:



Função arco cosseno

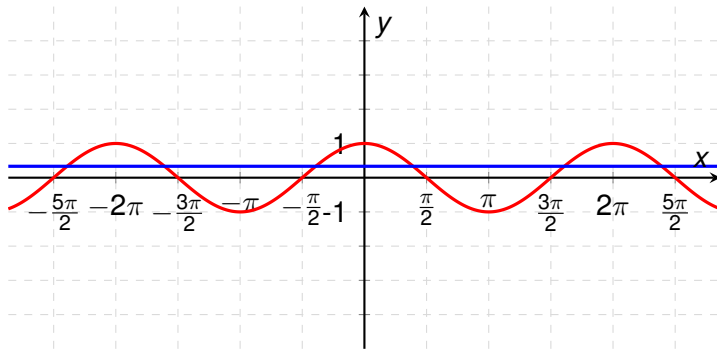
Lembremos do gráfico da função cosseno:

(1) Sim, há solução.



Função arco cosseno

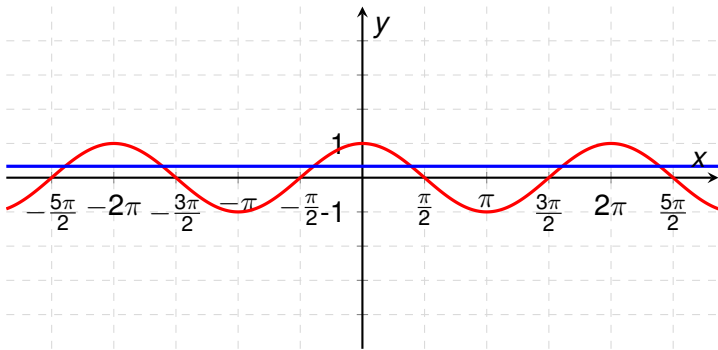
Lembremos do gráfico da função cosseno:



- (1) Sim, há solução.
- (2) Há infinitas soluções.
Conseguimos vê-las no gráfico, mas não temos nomes para elas.
- (3) $\cos x = y$ possui solução quando $y \in [-1, 1]$.

Função arco cosseno

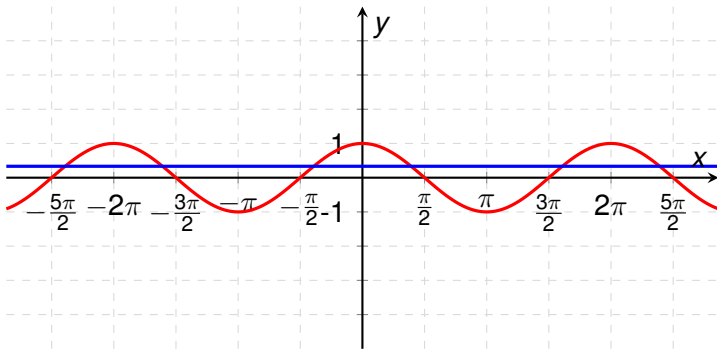
Lembremos do gráfico da função cosseno:



- (1) Sim, há solução.
 - (2) Há infinitas soluções.
Conseguimos vê-las no gráfico, mas não temos nomes para elas.
 - (3) $\cos x = y$ possui solução quando $y \in [-1, 1]$.
- Para dar nomes às soluções, precisamos escolher uma delas.

Função arco cosseno

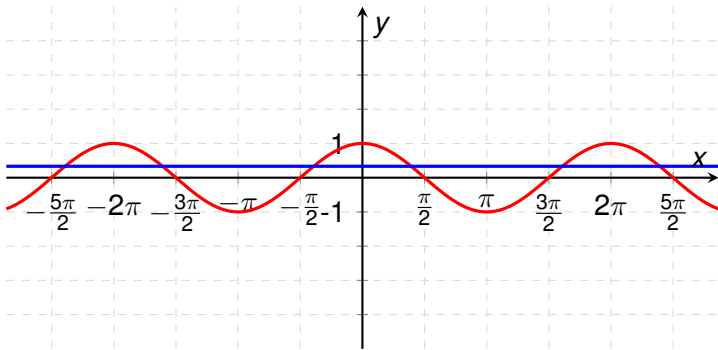
Lembremos do gráfico da função cosseno:



- (1) Sim, há solução.
 - (2) Há infinitas soluções. Conseguimos vê-las no gráfico, mas não temos nomes para elas.
 - (3) $\cos x = y$ possui solução quando $y \in [-1, 1]$.
- Para dar nomes às soluções, precisamos escolher uma delas.
 - Isso é feito tornando a função cosseno injetora, isto é, reduzindo o domínio.

Função arco cosseno

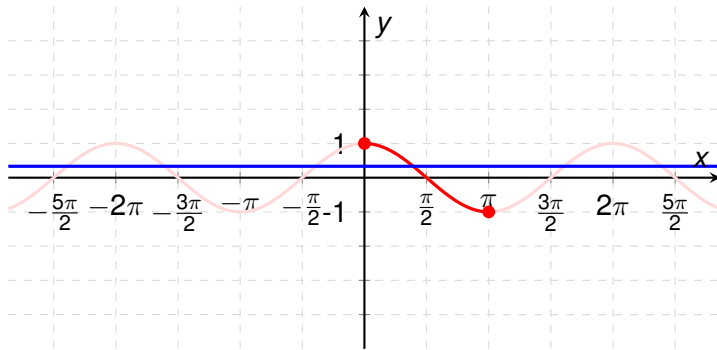
Lembremos do gráfico da função cosseno:



- (1) Sim, há solução.
 - (2) Há infinitas soluções. Conseguimos vê-las no gráfico, mas não temos nomes para elas.
 - (3) $\cos x = y$ possui solução quando $y \in [-1, 1]$.
- ▶ Para dar nomes às soluções, precisamos escolher uma delas.
 - ▶ Isso é feito tornando a função cosseno injetora, isto é, reduzindo o domínio.
 - ▶ Em $[0, \pi]$ a função cosseno é injetora.

Função arco cosseno

Lembremos do gráfico da função cosseno:



- (1) Sim, há solução.
 - (2) Há infinitas soluções. Conseguimos vê-las no gráfico, mas não temos nomes para elas.
 - (3) $\cos x = y$ possui solução quando $y \in [-1, 1]$.
- ▶ Para dar nomes às soluções, precisamos escolher uma delas.
 - ▶ Isso é feito tornando a função cosseno injetora, isto é, reduzindo o domínio.
 - ▶ Em $[0, \pi]$ a função cosseno é injetora.

Função arco cosseno

- ▶ Conclusão: a função $f : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ dada por $f(x) = \cos x$ é bijetora e, portanto, possui inversa.

Função arco cosseno

- ▶ Conclusão: a função $f : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ dada por $f(x) = \cos x$ é bijetora e, portanto, possui inversa.
- ▶ Sua inversa ainda não possui nome, pois não há nome para o x isolado na equação $\cos x = 1/3$, por exemplo.

Função arco cosseno

- ▶ Conclusão: a função $f : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ dada por $f(x) = \cos x$ é bijetora e, portanto, possui inversa.
- ▶ Sua inversa ainda não possui nome, pois não há nome para o x isolado na equação $\cos x = 1/3$, por exemplo.
- ▶ O nome que escolhemos foi $\arccos 1/3$. Assim, criamos a função $f^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$ dada por $f^{-1}(x) = \arccos x$.

Função arco cosseno

- ▶ Conclusão: a função $f : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ dada por $f(x) = \cos x$ é bijetora e, portanto, possui inversa.
- ▶ Sua inversa ainda não possui nome, pois não há nome para o x isolado na equação $\cos x = 1/3$, por exemplo.
- ▶ O nome que escolhemos foi $\arccos 1/3$. Assim, criamos a função $f^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$ dada por $f^{-1}(x) = \arccos x$.
- ▶ Ganhamos de brinde que só é permitido calcular $\arccos x$ se $x \in [-1, 1]$ e que o resultado de $\arccos x$ é um número que pertence a $[0, \pi]$.

Função arco cosseno

- ▶ Conclusão: a função $f : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ dada por $f(x) = \cos x$ é bijetora e, portanto, possui inversa.
- ▶ Sua inversa ainda não possui nome, pois não há nome para o x isolado na equação $\cos x = 1/3$, por exemplo.
- ▶ O nome que escolhemos foi $\arccos 1/3$. Assim, criamos a função $f^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$ dada por $f^{-1}(x) = \arccos x$.
- ▶ Ganhamos de brinde que só é permitido calcular $\arccos x$ se $x \in [-1, 1]$ e que o resultado de $\arccos x$ é um número que pertence a $[0, \pi]$.
- ▶ Também ganhamos um nome para uma solução da equação $\cos x = 1/3$, uma das soluções é $x = \arccos 1/3$.

Função arco cosseno

- ▶ Conclusão: a função $f : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ dada por $f(x) = \cos x$ é bijetora e, portanto, possui inversa.
- ▶ Sua inversa ainda não possui nome, pois não há nome para o x isolado na equação $\cos x = 1/3$, por exemplo.
- ▶ O nome que escolhemos foi $\arccos 1/3$. Assim, criamos a função $f^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$ dada por $f^{-1}(x) = \arccos x$.
- ▶ Ganhamos de brinde que só é permitido calcular $\arccos x$ se $x \in [-1, 1]$ e que o resultado de $\arccos x$ é um número que pertence a $[0, \pi]$.
- ▶ Também ganhamos um nome para uma solução da equação $\cos x = 1/3$, uma das soluções é $x = \arccos 1/3$.
- ▶ Usando que $x = \arccos 1/3$ é solução desta equação, então $\cos(\arccos 1/3) = 1/3$.

Função arco cosseno

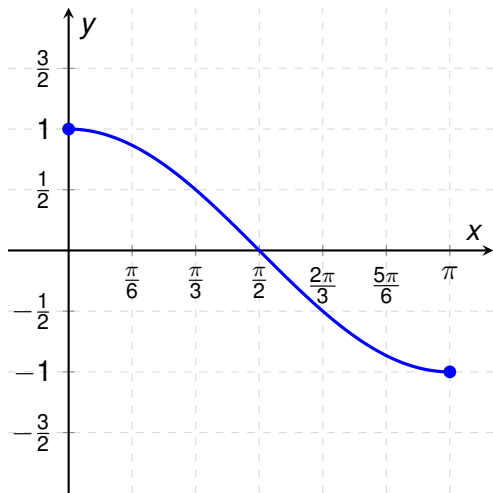
- ▶ Conclusão: a função $f : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ dada por $f(x) = \cos x$ é bijetora e, portanto, possui inversa.
- ▶ Sua inversa ainda não possui nome, pois não há nome para o x isolado na equação $\cos x = 1/3$, por exemplo.
- ▶ O nome que escolhemos foi $\arccos 1/3$. Assim, criamos a função $f^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$ dada por $f^{-1}(x) = \arccos x$.
- ▶ Ganhamos de brinde que só é permitido calcular $\arccos x$ se $x \in [-1, 1]$ e que o resultado de $\arccos x$ é um número que pertence a $[0, \pi]$.
- ▶ Também ganhamos um nome para uma solução da equação $\cos x = 1/3$, uma das soluções é $x = \arccos 1/3$.
- ▶ Usando que $x = \arccos 1/3$ é solução desta equação, então $\cos(\arccos 1/3) = 1/3$.
- ▶ Mais uma conclusão: podemos não conhecer o valor exato de $\arccos 1/3$, mas sabemos que ele é um número como qualquer outro. E ele foi escolhido para ser um número cujo cosseno é igual a $1/3$.

Função arco cosseno

Como é o gráfico da função $f(x) = \arccos x$?

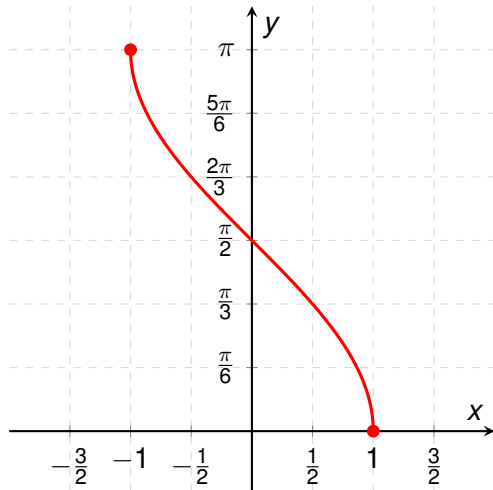
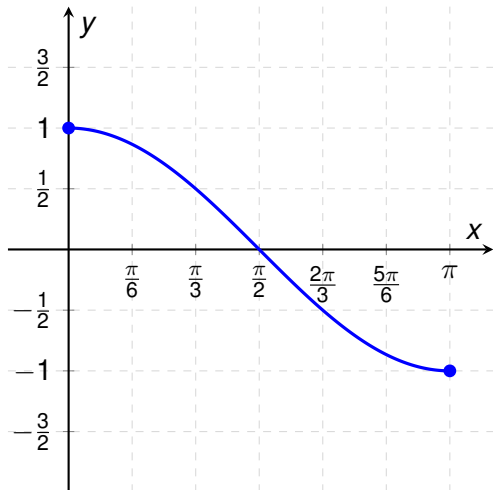
Função arco cosseno

Como é o gráfico da função $f(x) = \arccos x$?



Função arco cosseno

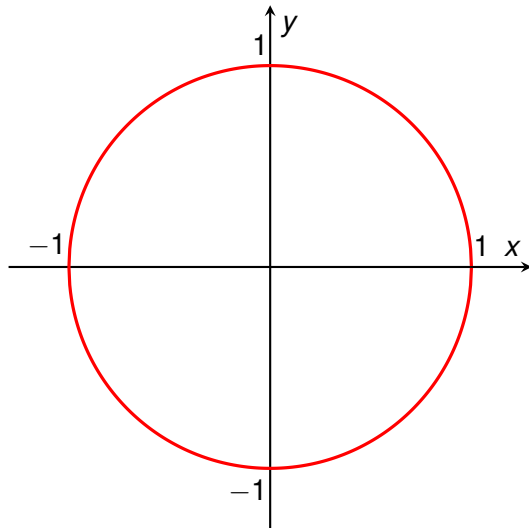
Como é o gráfico da função $f(x) = \arccos x$?



Função arco cosseno

Exemplo

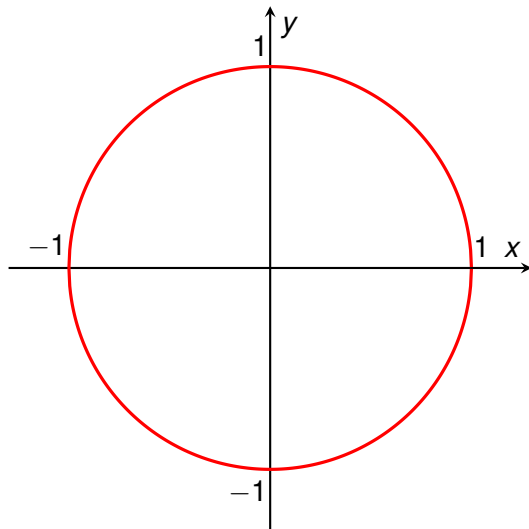
- ▶ $\arccos 1 =$
- ▶ $\arccos(-\sqrt{3}/2) =$



Função arco cosseno

Exercício

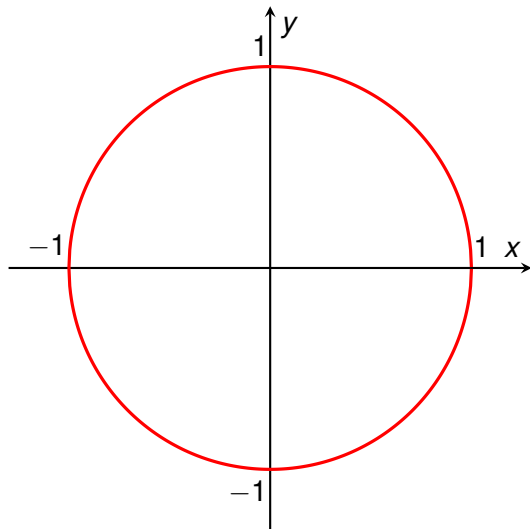
- ▶ $\arccos(\sqrt{2}/2) =$
- ▶ $\arccos(-1/2) =$
- ▶ $\cos(\arccos x) =$
- ▶ $\arccos(\cos x) =$



Função arco cosseno

Exercício

- ▶ Resolva a equação $\cos x = 1/2$.
- ▶ Resolva a equação $\cos x = 1/3$.



Exercício desafio

Exercício

- ▶ $\cos(\arcsen x) = ?$
- ▶ $\sin(\arccos x) = ?$

Função arco tangente

Pergunta (1)

A equação $\operatorname{tg} x = 2$ possui solução?

Função arco tangente

Pergunta (1)

A equação $\operatorname{tg} x = 2$ possui solução?

Pergunta (2)

Se sim, quem é(são) ela(s)? Quantas são?

Função arco tangente

Pergunta (1)

A equação $\operatorname{tg} x = 2$ possui solução?

Pergunta (2)

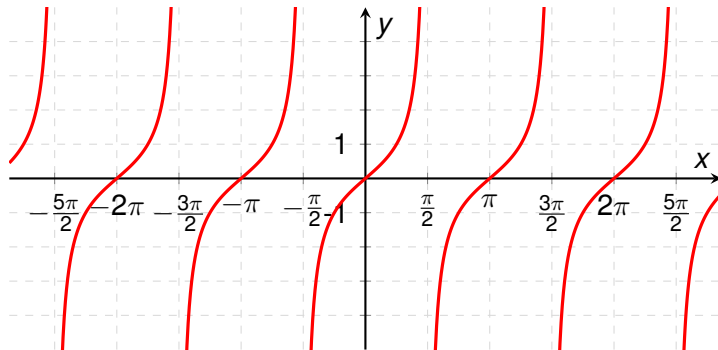
Se sim, quem é(são) ela(s)? Quantas são?

Pergunta (3)

Trocando 2 por outro número, a equação passa a ter (ou não ter) solução?

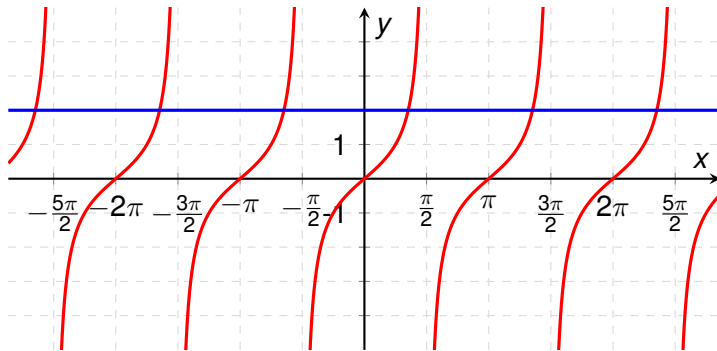
Função arco tangente

Lembremos do gráfico da função tangente:



Função arco tangente

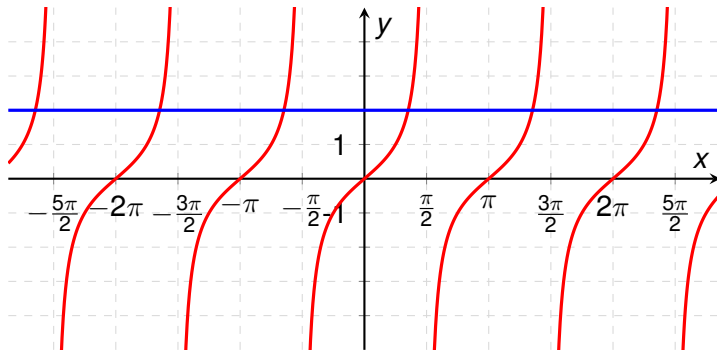
Lembremos do gráfico da função tangente:



Função arco tangente

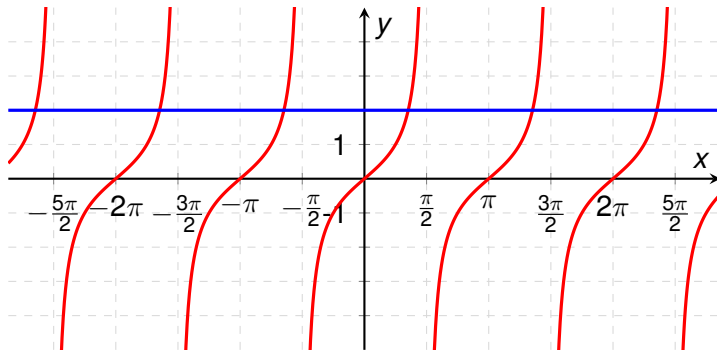
(1) Sim, há solução.

Lembremos do gráfico da função tangente:



Função arco tangente

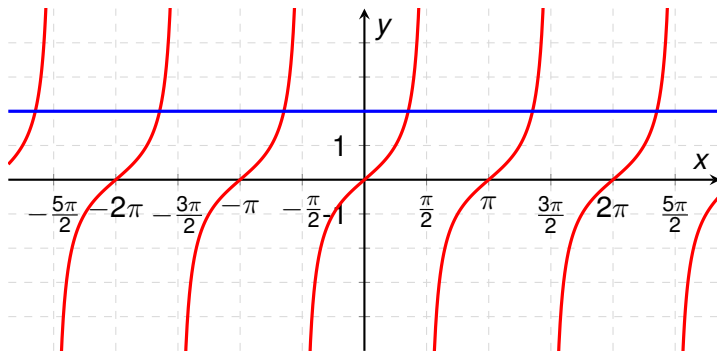
Lembremos do gráfico da função tangente:



- (1) Sim, há solução.
- (2) Há infinitas soluções.
Conseguimos vê-las no gráfico, mas não temos nomes para elas.

Função arco tangente

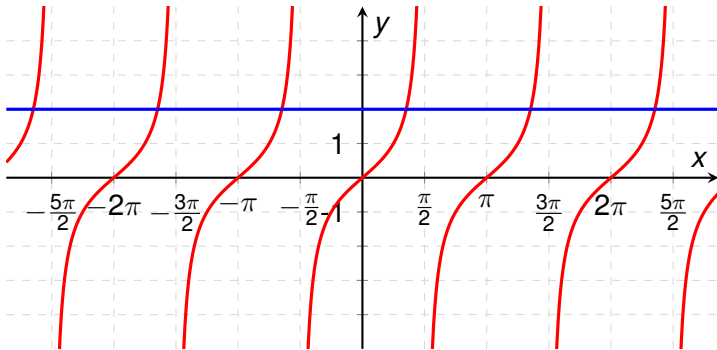
Lembremos do gráfico da função tangente:



- (1) Sim, há solução.
- (2) Há infinitas soluções.
Conseguimos vê-las no gráfico, mas não temos nomes para elas.
- (3) $\operatorname{tg} x = y$ possui solução para qualquer $y \in \mathbb{R}$.

Função arco tangente

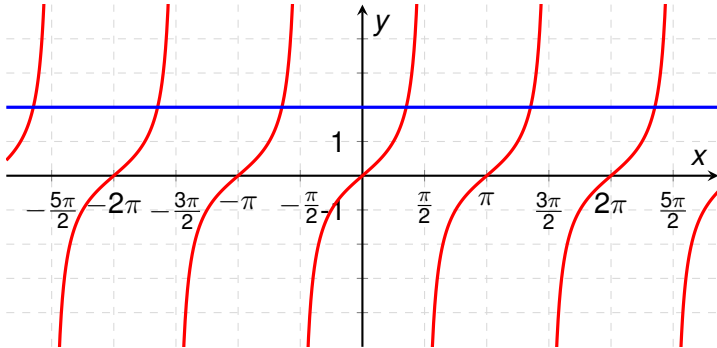
Lembremos do gráfico da função tangente:



- (1) Sim, há solução.
 - (2) Há infinitas soluções.
Conseguimos vê-las no gráfico, mas não temos nomes para elas.
 - (3) $\operatorname{tg} x = y$ possui solução para qualquer $y \in \mathbb{R}$.
- Para dar nomes às soluções, precisamos escolher uma delas.

Função arco tangente

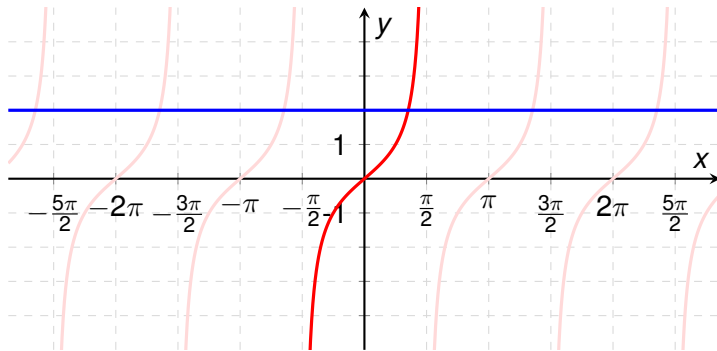
Lembremos do gráfico da função tangente:



- (1) Sim, há solução.
 - (2) Há infinitas soluções. Conseguimos vê-las no gráfico, mas não temos nomes para elas.
 - (3) $\operatorname{tg} x = y$ possui solução para qualquer $y \in \mathbb{R}$.
- Para dar nomes às soluções, precisamos escolher uma delas.
 - Isso é feito tornando a função tangente injetora, isto é, reduzindo o domínio.

Função arco tangente

Lembremos do gráfico da função tangente:



- (1) Sim, há solução.
 - (2) Há infinitas soluções. Conseguimos vê-las no gráfico, mas não temos nomes para elas.
 - (3) $\text{tg } x = y$ possui solução para qualquer $y \in \mathbb{R}$.
- ▶ Para dar nomes às soluções, precisamos escolher uma delas.
 - ▶ Isso é feito tornando a função tangente injetora, isto é, reduzindo o domínio.
 - ▶ Em $(-\pi/2, \pi/2)$ a função tangente é injetora.

Função arco tangente

- Conclusão: a função $f : (-\pi/2, \pi/2) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{tg} x$ é bijetora e, portanto, possui inversa.

Função arco tangente

- ▶ Conclusão: a função $f : (-\pi/2, \pi/2) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{tg} x$ é bijetora e, portanto, possui inversa.
- ▶ Sua inversa ainda não possui nome, pois não há nome para o x isolado na equação $\operatorname{tg} x = 2$, por exemplo.

Função arco tangente

- ▶ Conclusão: a função $f : (-\pi/2, \pi/2) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{tg} x$ é bijetora e, portanto, possui inversa.
- ▶ Sua inversa ainda não possui nome, pois não há nome para o x isolado na equação $\operatorname{tg} x = 2$, por exemplo.
- ▶ O nome que escolhemos foi $\operatorname{arctg} 2$. Assim, criamos a função $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ dada por $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$.

Função arco tangente

- ▶ Conclusão: a função $f : (-\pi/2, \pi/2) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{tg} x$ é bijetora e, portanto, possui inversa.
- ▶ Sua inversa ainda não possui nome, pois não há nome para o x isolado na equação $\operatorname{tg} x = 2$, por exemplo.
- ▶ O nome que escolhemos foi $\operatorname{arctg} 2$. Assim, criamos a função $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ dada por $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$.
- ▶ Ganhamos de brinde que é permitido calcular $\operatorname{arctg} x$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$ e que o resultado de $\operatorname{arctg} x$ é um número que pertence a $(-\pi/2, \pi/2)$.

Função arco tangente

- ▶ Conclusão: a função $f : (-\pi/2, \pi/2) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{tg} x$ é bijetora e, portanto, possui inversa.
- ▶ Sua inversa ainda não possui nome, pois não há nome para o x isolado na equação $\operatorname{tg} x = 2$, por exemplo.
- ▶ O nome que escolhemos foi $\operatorname{arctg} 2$. Assim, criamos a função $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ dada por $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$.
- ▶ Ganhamos de brinde que é permitido calcular $\operatorname{arctg} x$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$ e que o resultado de $\operatorname{arctg} x$ é um número que pertence a $(-\pi/2, \pi/2)$.
- ▶ Também ganhamos um nome para uma solução da equação $\operatorname{tg} x = 2$, uma das soluções é $x = \operatorname{arctg} 2$.

Função arco tangente

- ▶ Conclusão: a função $f : (-\pi/2, \pi/2) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{tg} x$ é bijetora e, portanto, possui inversa.
- ▶ Sua inversa ainda não possui nome, pois não há nome para o x isolado na equação $\operatorname{tg} x = 2$, por exemplo.
- ▶ O nome que escolhemos foi $\operatorname{arctg} 2$. Assim, criamos a função $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ dada por $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$.
- ▶ Ganhamos de brinde que é permitido calcular $\operatorname{arctg} x$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$ e que o resultado de $\operatorname{arctg} x$ é um número que pertence a $(-\pi/2, \pi/2)$.
- ▶ Também ganhamos um nome para uma solução da equação $\operatorname{tg} x = 2$, uma das soluções é $x = \operatorname{arctg} 2$.
- ▶ Usando que $x = \operatorname{arctg} 2$ é solução desta equação, então $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2) = 2$.

Função arco tangente

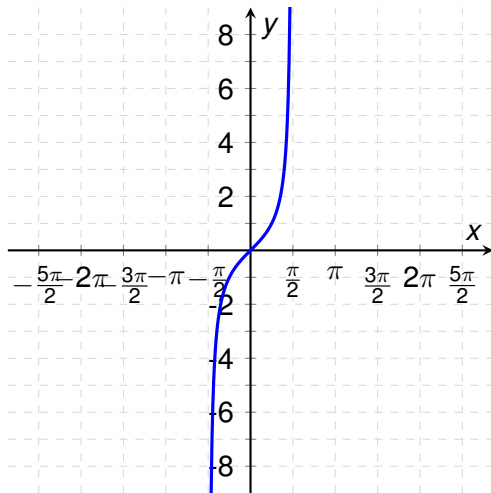
- ▶ Conclusão: a função $f : (-\pi/2, \pi/2) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{tg} x$ é bijetora e, portanto, possui inversa.
- ▶ Sua inversa ainda não possui nome, pois não há nome para o x isolado na equação $\operatorname{tg} x = 2$, por exemplo.
- ▶ O nome que escolhemos foi $\operatorname{arctg} 2$. Assim, criamos a função $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ dada por $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$.
- ▶ Ganhamos de brinde que é permitido calcular $\operatorname{arctg} x$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$ e que o resultado de $\operatorname{arctg} x$ é um número que pertence a $(-\pi/2, \pi/2)$.
- ▶ Também ganhamos um nome para uma solução da equação $\operatorname{tg} x = 2$, uma das soluções é $x = \operatorname{arctg} 2$.
- ▶ Usando que $x = \operatorname{arctg} 2$ é solução desta equação, então $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2) = 2$.
- ▶ Mais uma conclusão: podemos não conhecer o valor exato de $\operatorname{arctg} 2$, mas sabemos que ele é um número como qualquer outro. E ele foi escolhido para ser um número cujo tangente é igual a 2.

Função arco tangente

Como é o gráfico da função $f(x) = \operatorname{arctg} x$?

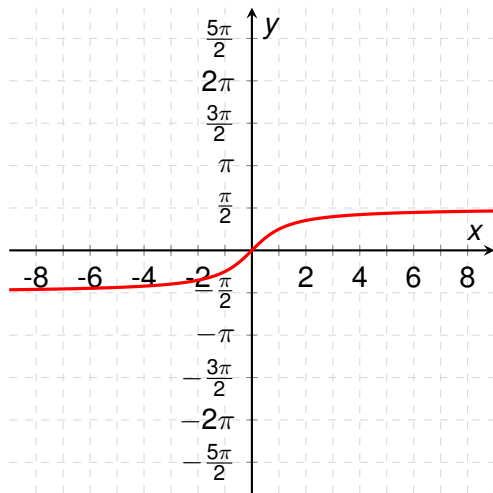
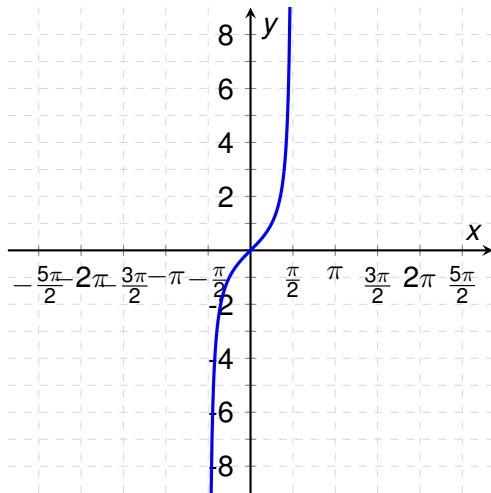
Função arco tangente

Como é o gráfico da função $f(x) = \operatorname{arctg} x$?



Função arco tangente

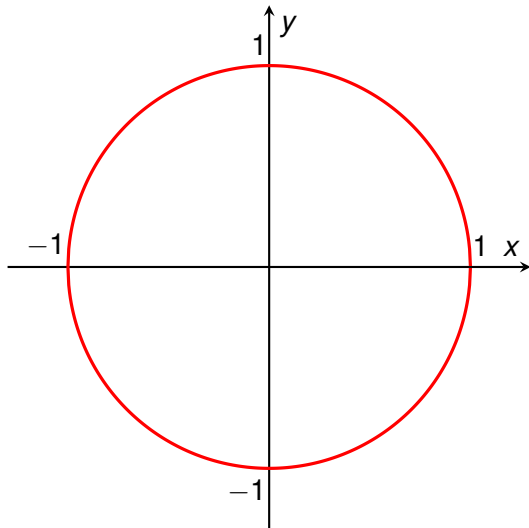
Como é o gráfico da função $f(x) = \operatorname{arctg} x$?



Função arco tangente

Exemplo

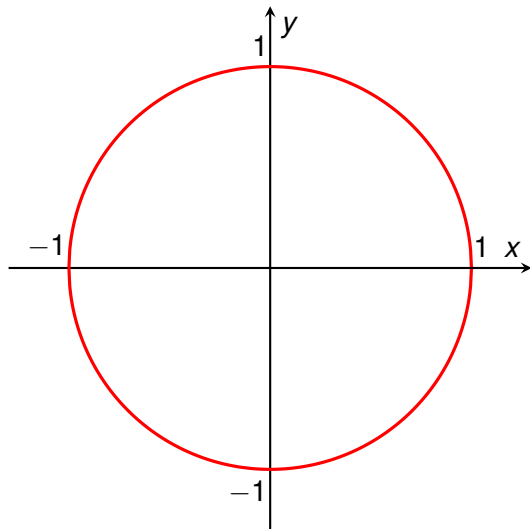
- ▶ $\operatorname{arctg} 1 =$
- ▶ $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}/3) =$



Função arco tangente

Exercício

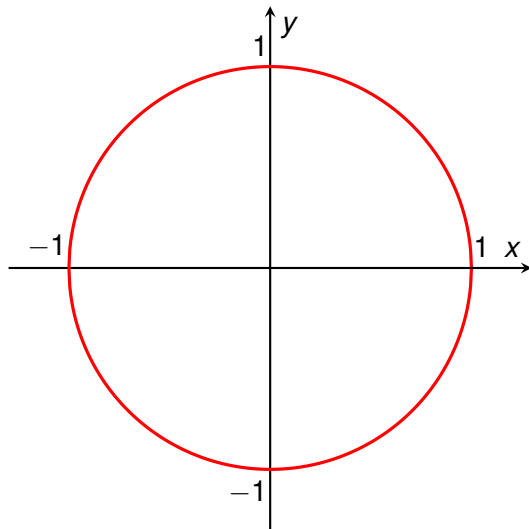
- ▶ $\operatorname{arctg}(\sqrt{3}) =$
- ▶ $\operatorname{arctg}(-1) =$
- ▶ $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) =$
- ▶ $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) =$



Função arco tangente

Exercício

- ▶ Resolva a equação $\operatorname{tg} x = 1$.
- ▶ Resolva a equação $\operatorname{tg} x = 3$.



Outras funções trigonométricas inversas

Outras funções trigonométricas inversas

- ▶ Podemos definir também arco cotangente, arco secante e arco cossecante?

Outras funções trigonométricas inversas

- ▶ Podemos definir também arco cotangente, arco secante e arco cossecante?
Sim!!

Outras funções trigonométricas inversas

- ▶ Podemos definir também arco cotangente, arco secante e arco cossecante?
Sim!!
- ▶ Não faremos aqui pois a escolha da restrição de domínio depende de livro para livro.

Outras funções trigonométricas inversas

- ▶ Podemos definir também arco cotangente, arco secante e arco cossecante?
Sim!!
- ▶ Não faremos aqui pois a escolha da restrição de domínio depende de livro para livro.
- ▶ Deixamos de exercício: defina suas próprias funções arco cotangente, arco secante e arco cossecante!!

FIM